$6^{\underline{a}}$ Lista de MAT145 - Cálculo II - IO
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Atenção: Resolverei em sala os exercícios 1, 2, 3, 5, 8, 18, 19 e 23, 24 e 28 . Resolverei também: 6(a), 13(a) e 17(a). Todos estes não serão corrigidos pelo monitor.

1. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, e o gráfico de g contido numa superfície de nível de F. Então: $P_0 \in Gr(g)$ e $\vec{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_o.

2. Seja $f(x,y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$ unitários e ortogonais. Então:
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\vec{u} \ + \ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\vec{v} \ .$$

3. A função diferenciável $z = f(x,y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$.

4. Seja $w = f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

   a) Dê um exemplo de uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com imagem contida na superfície de nível 1 de $f : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

   b) Prove que $\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0, \ \ \forall t_0$ no domínio de γ.

   c) Determine a equação do plano tangente à superfície dada, no ponto (x_0,y_0,z_0).

   d) Dê a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1,1,1)$.

5. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2,5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto ?

6. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

   (a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1,2)$.

   (b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

7. Determine uma reta tangente à curva $x^2+xy+y^2 = 7$ e paralela à reta $4x+5y = 17$.

8. Com argumentos geométricos, ache soluções da equação a derivadas parciais dada.
$$(a) \ \ 3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (b) \ \ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (c) \ \ y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ .$$

9. Determine uma função $z = f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico passe pelos pontos $(1,1,3)$, $(0,0,1)$ e $(0,1,2)$.

10. Determine um plano tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

11. Ache um plano contendo $(5,0,1)$ e $(1,0,3)$ e tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

12. Determine uma função $z = f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial y}$ e cujo gráfico contenha a imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

13. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:
(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 10x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 1$.
(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + 3x^2 - y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy - x + 3y^2$.

14. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0,0,2)$ e tal que:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \, , \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + ye^{y^2} \right) .$$

15. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção da superf. cilíndrica $x^2 + y^2 = 2$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

16. É dada uma curva $\gamma(t)$ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $x + y + z = 1$. Suponha $\gamma(t_0) = (0,1,0)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma parametrização para a intersecção acima.

17. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto dado.

    (a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1,-1,1)$.

    (b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$.

    (c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2,2,1)$.

18. Um campo de forças $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, P e Q funções definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é dito **conservativo** se existe um campo escalar $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla}\varphi(x, y) = \vec{F}(x, y) \quad \text{em } \Omega \ .$$

Uma tal função φ, quando existe, chama-se **função potencial** associada ao campo $\vec{F}$. Verifique se são conservativos os campos abaixo (justifique):

$$(a)\ \vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad (b)\ \vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} \qquad (c)\ \vec{F}(x, y) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \ .$$

19. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega \,, \forall t \in [a, b]$, uma curva de classe C^1, com $\gamma(a) = \gamma(b)$ [γ é então dita **curva fechada**]. Se $\vec{F}$ for conservativo então,

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0 \ .$$

20. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \frac{-y}{x^2 = y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\ ,\ (x, y) \neq (0, 0)$.

    (a) Verifique
    $$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \ .$$

    (b) Compute $\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, onde $\gamma(t) = (\cos t\,, \sin t)\,, t \in [0, 2\pi]$.

    (c) $\vec{F}$ é conservativo ? Por que?

21. Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo de forças com P e Q contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se $\vec{F}$ é conservativo, existe uma função escalar $U(x, y)$ definida em Ω tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ em Ω. Denominamos U **função energia potencial** associada ao campo $\vec{F}$. Determine, caso exista, a função energia potencialassociada ao campo $\vec{F}$ dado e satisfazendo a condição dada.

    (a) $\vec{F}(x, y) = -6x\vec{i} - 2y\vec{j}$ e $U(0, 0) = 0$.

    (b) $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} - xy\vec{j}$ e $U(0, 0) = 1000$.

A RELAÇÃO DE EULER

Definição: Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ é dita **homogênea de grau** λ se,

$$f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)\,, \forall t > 0 \text{ e } \forall (x, y) \in A\ .$$

22. Verifique se são homogêneas as funções abaixo e determine o grau de homogeneidade.

$$(a)\ f(x,y) = \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3} \qquad (b)\ f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4} \qquad (c)\ f(x,y) = \frac{2}{x^2 + y^2}\ .$$

23. Seja $f(x, y)$ diferenciável e homogênea de grau λ no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Verifique:

    (a) Quaisquer que sejam $t > 0$ e $(a, b) \in \Omega$ tais que $(at, bt) \in \Omega$,

    $$\frac{\partial f}{\partial x}(at, bt) + b\frac{\partial f}{\partial y}(at, bt) = \lambda t^{\lambda-1} f(a, b)\ .$$

    (b) Conclua de (a) que

    $$\textbf{(Relação de Euler)} \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda f\ .$$

    Sugestão para (a): Derive em relação a t os dois membros de $f(at, bt) = t^\lambda f(a, b)$.

24. Seja $f(x, y)$ definida e diferenciável na bola aberta B. Suponha que f verifica em B a relação de Euler

    $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f(x, y)\ .$$

    Verifique que f é homogênea de grau λ.
    Sugestão: Mostre que $g(t) = \frac{f(at,bt)}{t^\lambda}$ é constante.

25. Seja $\varphi = \varphi(u)$ diferenciável; $f(x, y) = x^2\varphi(\frac{x}{y})$ verifica $xf_x + yf_y = 2f$? Por quê?

26. Verifique se a função abaixo verifica a equação $xf_x + yf_y = -f$. Justifique a resposta.

    $$f(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{y}} \arctan \frac{x}{y} + \sin(\cos \frac{x}{y})}{\sqrt[3]{x^3 + y^3}}\ .$$

27. Determine uma família de funções que verifique a equação $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

28. Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto Ω e homogênea de grau λ. Verifique que $\frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$. Isto é:

    $$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) = t^{\lambda-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,,\ \text{se } t > 0 \text{ e} (tx, ty) \in \Omega\ .$$

    Sugestão: Derive em relação a x os dois membros de $f(tx, ty) = t^\lambda f(x, y)$.

29. Seja $f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(0, 0)$ e $f(tx, ty) = tf(x, y)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f é linear; i.e.,

    $$\text{existem } \ a, b \in \mathbb{R} \text{ tais que} f(x, y) = ax + by\,,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

30. Seja $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

    (a) Verifique que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ para todo t e todo (x, y).

    (b) Releia o exerc. 29 e responda: f é diferenciável em $(0, 0)$? Por que ?