$4^{\underline{a}}$ Lista de MAT145 - Cálculo II - IO
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Determine as derivadas parciais de:

a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

c) $z = x^2\ln(1+x^2+y^2)$ d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

e) $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ f) $z = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

2. Compute as derivadas parciais de primeira ordem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$. Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ em que são diferenciáveis as funções

a) $f(x,y) = xy$ b) $z = f(x,y)\ln(1+x^2+y^2)$

c) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ d) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$.

3. Determine se f é contínua, e também se é diferenciável, em $(0,0)$. Compute as derivadas parciais de f em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ e investigue se as funções derivadas parciais de f são contínuas na origem. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f na origem $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$, se existir tal plano (isto é, se f é diferenciável na origem).

$(a)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $(b)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$(c)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $(d)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se}\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Seja $f : I\!R \to I\!R$ contínua, $f(3) = 4$ e $g(x,y,z) = \displaystyle\int_0^{x+y^2+z^4} f(t)d(t)$. Compute,

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$

5. Seja $\varphi : I\!R \to I\!R$ diferenciável tal que $\varphi'(3) = 4$. Seja $g(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$.

Calcule: a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1,1)$ b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1)$ c) $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$

6. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ supondo,

   a) $z = sen(xy),\ x = 3t,\ e\ y = t^2$ b) $z = \ln(1 + x^2 + y^2),\ x = \text{sen}t,\ y = \text{cos}t$

7. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$. Compute,

   a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f. b) $g'(0)$ supondo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

8. Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = arc\text{tg(x)}$

   a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$

   b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$

9. Seja $z = f(u + 2v,\ u^2 - v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

10. Prove que $u = f(x+at, y+bt), a, b$ constantes, é solução da equação as derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}$$

11. Seja γ uma curva que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    a) Dê a equação da reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$. b) Ache uma curva $\gamma(t)$ como em (a).

12. Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ funções diferenciáveis com $f(x, y, g(x, y)) = 0, \forall(x, y) \in \text{Dom}(g)$. Suponha $g(1, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$.
    Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g, no ponto $(1, 1, 3)$.

13. Seja $g(t) = f(3t^2,\ t^3,\ e^{2t})$ e suponha $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$. Compute,

    a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f. b) $g'(0)$.

14. Seja $g(x, y) = xf(x^2 + y, 2y, 2x - y)$. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

15. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

16. Determine o plano tangente e a reta normal à superfície $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

17. Determine a equação do plano normal, em $(1, 2, 3)$, à intersecção das superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \quad \text{e} \quad xyz = 6\ .$$