MAT 144 - CÁLCULO I - IOUSP

1^{o} semestre de 2010

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

TEOREMAS: DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI), SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS, DE ROLLE, DO VALOR MÉDIO (TVM), DO VALOR MÉDIO GENERALIZADO (CAUCHY) E REGRAS DE L'HOSPITAL

Nesta seção apresentamos sete teoremas, provando os cinco relativos à **derivação** e apenas enunciando os dois imediatamente abaixo relativos a **continuidade**.

(Teorema do Valor Intermediário (TVI) (Bolzano)) Se $f(a,b) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então a imagem de f, $\mathrm{Im}(f) = f((a,b))$, é um intervalo. Isto é, se $y \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x_1) < y < f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in (a,b)$, então existe $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = y$.

Prova: Guidorizzi, L. H., "Um Curso de Cálculo", V. 1, 5ª ed., p. 511, LTC Editora, 2001 ■

(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f assume máximo e mínimo em $[a,b]$. Isto é, existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$m = f(x_1) \leq \ f(x) \ \leq f(x_2) = M, \ \ \forall \ \ x \in [a,b] \ .$$

Prova: Guidorizzi, L. H., "Um Curso de Cálculo", V. 1, 5ª ed., p. 511, LTC Editora, 2001 ■

A seguir, utilizando os resultados acima provamos os próximos.

(Condição Necessária para Máximos e Mínimos) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Se $x_0 \in (a,b)$ é ponto de máximo ou mínimo, locais, de f então $f'(x_0) = 0$.

Prova:

Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor x_0 um ponto de mínimo local. Assim, se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in (a,b)$ temos $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ e

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0\,, \text{ se } h > 0\,, \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0\,, \text{ se } h < 0\ .$$

Logo, como $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ e então $f'(x_0) = 0$ ■

Teorema de Rolle Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prova: Se f é constante o resultado é óbvio. Senão, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass f assume um mínimo $m = f(x_1)$ e um máximo $M = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in [a,b]$ e $m \neq M$. Logo, como $f(a) = f(b)$, temos ou $x_1 \in (a,b)$ ou $x_2 \in (a,b)$. Isto é, ou x_1 é um ponto de mínimo local e $f'(x_1) = 0$ ou x_2 é um ponto de máximo local e $f'(x_2) = 0$ ■

Teorema do Valor Médio (TVM) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\ .$$

Prova: Considerando a equação da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b)$,

$$S(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)\ ,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

definimos a função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b),

$$\varphi(t) = f(t) - S(t)\,, t \in [a,b]\ .$$

É claro que $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$ e então, pelo Teorema de Rolle aplicado à função φ, existe $c \in (a,b)$ tal que $0 = \varphi'(c) = f'(c) - S'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■

Interpretação física do Teorema do Valor Médio: Se um objeto puntual move-se sobre uma reta e se $s(t)$, $s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$, indica a distância em metros deste objeto em relação à origem adotada na reta, no instante t medido em segundos então o Teorema do Valor Médio expressa que em algum instante $t_0 \in [t_1, t_2]$ a velocidade instantânea $v(t_0) = s'(t_0)$ é igual à velocidade média $v_{\text{média}}$ no período $[t_1, t_2]$:

$$s'(t_0) = v(t_0) = v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \quad ■$$

Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy) Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a,b), com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

Prova: Inicialmente notemos que $g(b) - g(a) \neq 0$ pois caso contrário, pelo Teorema de Rolle existiria $x_0 \in (a,b)$ tal que $g'(x_0) = 0$, contra a hipótese.

Consideremos a função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b),

$$\varphi(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)\,, t \in [a,b]\,.$$

Temos, é claro, $\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$ e $\varphi(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$; logo,$\varphi(a) = \varphi(b)$. Assim, pelo TVM existe $c \in (a,b)$ tal que

$$0 = \varphi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) \implies [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \quad ■$$

Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio Generalizado: Esboçando no plano a curva $\gamma(t) = (g(t), f(t))$, $t \in [a, b]$, e a reta S pelos pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ vemos que existe uma reta T tangente à curva γ, em algum ponto $\gamma(c)$, e paralela à reta S. Isto é, se m_T e m_S são os coeficientes angulares de T e S temos,

$$m_T = m_S = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \ .$$

Note que geometricamente o vetor tangente à curva γ no ponto c é o vetor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\gamma'}(c) &= \lim_{t \to c} \frac{\gamma(t) - \gamma(c)}{t - c} = \lim_{t \to c} \Big(\frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \Big) \\ &= \Big(\lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \lim_{t \to c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \Big) = (f'(c), g'(c)), \end{aligned}$$

interpretado fisicamente como o vetor velocidade da curva γ no "instante c".

Ainda mais, o coeficiente angular m_T da reta T, paralela ao vetor $\gamma'(c)$, é a tangente do ângulo θ que o vetor forma com o eixo Ox (faça um esboço); logo,

$$m_T = \tan\theta = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \blacksquare$$

Regras de L'Hospital

Tais regras aplicam-se à análise das indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty} \ .$$

Mostremos que são também indeterminações

$$(i) \ \ 0.\infty \quad , \quad (ii) \ \ \infty - \infty \quad , \ (iii) \ \ 0^0 \quad , \ (iv) \ \ \infty^0 \ \ \text{e} \ \ (v) \ \ 1^\infty \ \ .$$

Prova: Temos,

(i) $\lim\limits_{x \to 0} x \frac{13}{x} = 13$.

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 15) - x = 15$.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7$.

(iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7$.

(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{\ln \pi}{x})^x = e^{\ln \pi} = \pi \ \ \blacksquare$

Estas cinco indeterminações são redutíveis às indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Por exemplo temos,

$$0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{0.(-\infty)} \ \ ; \ \ \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \infty} \ \ ; \ \ 1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty . 0} \ .$$

Atenção: 0^∞ não é indeterminação pois $0^\infty = e^{\infty \ln 0} = e^{\infty.(-\infty)} = e^{\infty} \in \{0, +\infty\}$.

Motivação às Regras de L'Hospital: Mostremos inicialmente uma versão simples e bem útil pois que aplicável em muitos casos. Suponhamos $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriváveis (logo, contínuas) e $p \in (a, b)$ satisfazendo $f(p) = g(p) = 0$ e $g'(p) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \ .$$

Verificação: Temos,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \qquad \blacksquare$$

Exemplos: Temos, aplicando o resultado acima (confira que podemos aplicá-lo),

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1 - 0}{1} = 1 \ .$$

$$(2) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \blacksquare$$

1ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis em (p, b) e $g'(x) \neq 0$, $\forall x$. Se

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to p^+} g(x) \ \text{ e existir } \ \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \text{(finito ou infinito)},$$

então

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Obs: Vale regra similar nas quatro condições: "$x \to p^-$", "$x \to p$", "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$".

Prova:

Definindo $f(p) = g(p) = 0$ obtemos f e g contínuas em $[p, b)$ e deriváveis em (p, b). Assim, dado $x \in (p, b)$ e aplicando o TVM generalizado ao intervalo $[p, x]$, existe $x_1 \in (p, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \ .$$

Desta forma, como $x_1 \to p^+$ se $x \to p^+$, concluímos

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \to p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \blacksquare$$

Observação: A 1ª regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^-$" é trivialmente equivalente à 1ª regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^+$" pois $x \to p^+ \Leftrightarrow -x \to -p^-$.

2ª Regra de L'Hospital: Sejam f e g deriváveis em (a,p), com $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a,p)$. Se

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to p^-} g(x) \ \text{ e existir } \ \lim_{x\to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \text{ (finito ou infinito),}$$

então

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Obs: Vale regra similar nas quatro condições: "$x \to p^+$", "$x \to p$", "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$".

Prova:

Suponhamos $\lim_{x\to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$, os casos $L = 0$ e $L = \infty$ são deixados ao leitor.

Como f e g tendem a $+\infty$ quando $x \to p^-$, podemos assumi-las estritamente positivas.

Dado então $\epsilon > 0$, consideremos $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Por hipótese existe $\overline{a} \in (a,p)$ tal que

$$(1) \qquad c \in [\overline{a}\,,p) \Longrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} \in \Big(L - \frac{\epsilon}{2}\,, L + \frac{\epsilon}{2}\Big) \ .$$

Também podemos assumir x suficientemente próximo de p tal que $f(x) > f(\overline{a})$ e $g(x) > g(\overline{a})$. Desta forma, aplicando o TVM Generalizado para as funções f e g no intervalo $[\overline{a}, x]$ obtemos,

$$(2) \qquad 0 < \frac{f(x) - f(\overline{a})}{g(x) - g(\overline{a})} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ \text{ para algum } \ c \in (\overline{a}, p) \ .$$

Mas,

$$(3) \qquad \frac{f(x) - f(\overline{a})}{g(x) - g(\overline{a})} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}}{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}} \right)$$

e, como $\lim_{x\to p^-} \frac{g(\overline{a})}{g(x)} = \lim_{x\to p^-} \frac{f(\overline{a})}{f(x)} = 0$, existe $\overline{\overline{a}} \in (\overline{a}, p)$ tal que

$$(4) \qquad x \in (\overline{\overline{a}}\,, p) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}} \ \in \ (1 - \delta, 1 + \delta)\,,$$

com $\delta > 0$, pequeno, e a ser convenientemente escolhido . Utilizando (3), (1) e (4) [por (2), $L \geq 0$ e portanto $L > 0$] supomos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $L - \frac{\epsilon}{2} > 0$ e obtemos,

$$x \in (\overline{\overline{a}}\,, p) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}} \right) \in \Big((L - \frac{\epsilon}{2})(1 - \delta)\,, \, (L + \frac{\epsilon}{2})(1 + \delta) \Big) \ .$$

Finalmente, escolhemos $\delta > 0$ e suficientemente pequeno tal que (notemos o caso $\delta = 0$)

$$\Big((L - \frac{\epsilon}{2})(1 - \delta)\,, \, (L + \frac{\epsilon}{2})(1 + \delta) \Big) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon) \qquad [\text{basta } 0 < \delta < \frac{\epsilon/2}{L + \epsilon/2}] \ \blacksquare$$