2ª Prova de MAT144 - Cálculo I - Instituto Oceanográfico
1º semestre de 2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. Compute as derivadas de:

a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg\,x + ln\ x}}{\mathrm{5x^4 + e^x}}$

b) $f(x) = e^{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}$

Resolução:

(a) $f'(x) = \dfrac{(\sec^2\, x + \frac{1}{x})(5x^4 + e^x) - (\mathrm{tg\,x + ln\ x})(\mathrm{20x^3 + e^x})}{(5x^4 + e^x)^2}$

$$(b)\ \ f'(x) = e^{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1(x+1) - (x-1)1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot e^{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \quad \blacksquare$$

2. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^2$.

Resolução:

Notemos que $x = 0$ é raíz dupla e assim f tem no máximo mais três raízes reais,

$$f(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1\right) .$$

(i) O domínio de f é $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ pois f é um polinômio com monômio dominante $\frac{x^5}{5}$.

(iii) $f'(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = x(x-1)(x^2 - x - 2)$ e

$$f'(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) .$$

As raízes de f' são, em ordem crescente, -1, 0, 1 e 2 .

Temos: $f' > 0$ em $(-\infty, -1)$, $f' < 0$ em $(-1, 0)$, $f' > 0$ em $(0, 1)$,
$f' < 0$ em $(1, 2)$ e $f' > 0$ em $(2, +\infty)$.

Assim: $f \nearrow$ em $(-\infty, -1)$, $f \searrow$ em $(-1, 0)$, $f \nearrow$ em$(0, 1)$
$f \searrow$ em$(1, 2)$ e $f \nearrow$ em $(2, +\infty)$.

Ainda,

$x = -1$ é ponto de máximo local, $x = 0$ é ponto de mínimo local,

$x = 1$ é ponto de máximo local, e $x = 2$é ponto de mínimo local .

(iv) $f''(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 = (x - \frac{1}{2})(4x^2 - 4x - 4) = 4(x - \frac{1}{2})(x^2 - x - 1)$ e

$$f''(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) .$$

As raízes de f'' são, em ordem crescente, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Temos: $f'' < 0$ em $\left(-\infty, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $f'' > 0$ em $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,
$f'' < 0$ em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $f'' > 0$ em $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$,

Assim: $f \cap$ em $\left(-\infty, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $f \cup$ em $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $f \cap$ em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$,

e f $\cup$ em $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

(v) $f(-1) = \frac{33}{30}$, $f(0) = 0$ e 0 é raíz dupla de f, $f(1) = \frac{11}{30}$ e
$f(2) = \frac{32}{5} - \frac{16}{2} - \frac{8}{3} + 4 = 6 + \frac{2}{5} - 8 - 2 - \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6-10}{15} = -\frac{4}{15}$.

(vi) Pontos de inflexão: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ■

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{4x + 3x^2}{1 + x^2}$.

Resolução: Temos,

(a) Domínio de f é $\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x}+3}{\frac{1}{x^2}+1} = 3$.
A reta $y = 3$ é assíntota horizontal em $\pm\infty$.

(c) $f'(x) = \frac{(4+6x)(1+x^2)-2x(4x+3x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x^2+6x+4}{(1+x^2)^2} = 2\frac{-2x^2+3x+2}{(1+x^2)^2} = -4\frac{(x+\frac{1}{2})(x-2)}{(1+x^2)^2}$
$f' < 0$ em $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $f' > 0$ em $(-\frac{1}{2}, 2)$ e $f' < 0$ em $(2, +\infty)$. Logo,
$f \searrow$ em $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $f \nearrow$ em $(-\frac{1}{2}, 2)$ e $f \searrow$ em $(2, +\infty)$.

$x = -\frac{1}{2}$ é ponto de mínimo local e $x = 2$ é ponto de máximo local;
$f(-\frac{4}{3}) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = -1$, $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$.

(d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\frac{(-4x+3)(1+x^2)^2 - (-2x^2+3x+2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = 2\frac{(-4x+3)(1+x^2) + 4x(2x^2-3x-2)}{(1+x^2)^3} = \\ &= 2\frac{4x^3 - 9x^2 - 12x+3}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

O gráfico do polinômio de grau 3 $p(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$: temos,

$$p'(x) = 12x^2 - 18x - 12 = 6(2x^2 - 3x - 2) = 12(x + \frac{1}{2})(x - 2)\,,$$

p' uma parábola com a concavidade voltada para cima,

$$p' > 0 \text{ em } (-\infty, -\frac{1}{2}) \;\;;\;\; p' < 0 \text{ em } (-\frac{1}{2}, 2) \;\;;\;\; p' > 0 \text{ em } (2, +\infty)\ .$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty \;\;;\;\; p(-\frac{1}{2}) = \frac{25}{4} > 0 \;\;;\;\; p(0) = 3 \;\;;\;\; p(2) = -25 < 0\ .$$

Logo, p tem uma raíz c_1, $c_1 < -\frac{1}{2}$ [$c_1 \in (-\frac{4}{3}, -1)$ pois $p(-\frac{4}{3}) < 0$ e $p(-1) > 0$]; uma raíz c_2 entre 0 e 2 [$0 < c_2 < \frac{1}{2}$ pois $p(0) = 3$ e $p(\frac{1}{2}) < 0$]; e uma raíz $c_3 \in (3, 4)$ pois $p(3) < 0$ e $p(4) > 0$. Então,

$$p(x) = 4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ , c_1 \in (-\frac{4}{3}, -1)\ \ c_2 \in (0, \frac{1}{2})\ , c_3 \in (3, 4)$$

e c_1, c_2 e c_3 são abscissas dos pontos de inflexão de f.
Em $(-\infty, c_1)$ a concavidade de f é p/ baixo, c_1 entre $-\frac{4}{3}$ e -1, f decresce de 3 a $f(c_1) < 0$;
em $(c_1, -\frac{1}{2})$ a concavidade é p/ cima f decresce de $f(c_1)$ a $f(-\frac{1}{2}) = -1$
em $(-\frac{1}{2}, c_2)$ a concavidade é p/ cima, c_2 entre 0 e $\frac{1}{2}$, f cresce de $f(-\frac{1}{2}) = -1$ até $f(c_2) > 0$, $f(c_2) < f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{5} < 3$;
em $(c_2, 2)$, a concavidade é para baixo, f cresce de $f(c_2) < 3$ a $f(2) = 4$
em $(2, c_3)$ a concavidade é para baixo a função decresce de 4 a $f(c_3) > 3$
em$(c_3, +\infty)$ a concavidade é para cima e f decresce de $f(3)$ a 3 $\blacksquare$

4. Compute as integrais indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3}e^{3x}+\operatorname{sen}3x\right)\,dx$

Resolução:

(a) Temos,

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^2}\,dx = \int \left(x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,dx = \frac{x^4}{4}+\ln|x|-\frac{1}{x}+k\,,k\in\mathbb{R}\,.$$

(b) Temos,

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\;+\;k_1\,,\;\;k_1\in\mathbb{R}\,,\;\;\text{e}$$

$$\int sen\,3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3}\;+\;k_2\,,k_2\in\mathbb{R}\,,.$$

Logo,

$$\int \left(\frac{1}{3}e^{3x}+\operatorname{sen}3x\right)\,dx = \frac{e^{3x}}{9}\;-\;\frac{\cos 3x}{3}\;+\;k\,,k\in\mathbb{R}\;\;\blacksquare$$

5. Compute as integrais definidas:

a) $\displaystyle\int_1^2 (x-2)^5\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Resolução: Temos, verifique os cômputos,

(a) $$\int_1^2 (x-2)^5\,dx = \left.\frac{(x-2)^6}{6}\right|_1^2 = 0 - \frac{(-1)^6}{6} = -\frac{1}{6}$$

(b) $$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin(\frac{1}{2}) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{6} \quad \blacksquare$$

6. Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

Resolução:

Temos $\cos x = \sin x$, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se e só se $x = \frac{\pi}{4}$ e então a área desejada é,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx \ + \ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\, dx =$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (\sqrt{2} - 1) \ + \ [-1 - (-\sqrt{2})] \ =$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1) \quad \blacksquare$$