1ª Prova de MAT144 - Cálculo I - Instituto Oceanográfico
29 de abril - 1º semestre de 2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________*GABARITO*____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. Compute:

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$.

(b) $\lim_{x\to p} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p}$, $p \in (0, +\infty)$.

Resolução:

(a) Temos,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x^3 + 2x^2 + 4x + 3} .$$

Então, o último limite é o de uma função racional cujo denominador não se anula em $= 2$ e assim a função racional é contínua em $x = 2$ e portanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6} = \frac{0}{27} = 0 .$$

(b) Temos,

$$(x - p) = (\sqrt{x} - \sqrt{p})(\sqrt{x} + \sqrt{p}) = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{p})(\sqrt{x} + \sqrt{p}) .$$

Logo,

$$\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{1}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{p})(\sqrt{x} + \sqrt{p})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[4]{p}\ 2\sqrt{p}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{p}\ \sqrt[4]{p^2}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{p^3}} = \frac{1}{4}\, p^{-\frac{3}{4}} \quad \blacksquare$$

2. Compute:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \text{sen } x}{x^2 - \text{sen } x}$.

   (b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{2x+5}$.

   Resolução:

(a) Dividindo numerador e denominador por $x \neq 0$ e aplicando o 1º Lim.Fund.,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \text{sen } x}{x^2 - \text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{\text{sen}\, x}{x}}{x - \frac{\text{sen}\, x}{x}} = \frac{1+1}{0-1} = -2 \ .$$

(b) Utilizando que

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{a}{x} = 0\,,\ \forall a \in \mathbb{R}\,,$$

temos, dividindo o numerador e o denominador da expressão entre parenteses no enunciado do ítem (b) por $x \neq 0$ e aplicando as propriedades elementares para o produto e o quociente de limites,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+5}{x+4}\right)^{2x+5} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right)^{2x+5} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left\{ \frac{[(1+\frac{5}{x})^x]^2 (1+\frac{5}{x})^5}{[(1+\frac{4}{x})^x]^2 (1+\frac{4}{x})^5} \right\} = \frac{(e^5)^2 \cdot 1}{(e^4)^2 \cdot 1} = e^2 \quad \blacksquare$$

3. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6x+4}{x+1}, & \text{se } \ x < -1 \\ x^2+1, & \text{se } \ x \geq -1 \end{cases}$.

(a) f é contínua em $x=-1$?

(b) f é derivável em $x=-1$?

(c) Esboce o gráfico de f

Resolução:

Temos,

(a)

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+6x+4}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+1)(x+2)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} 2(x+2) = 2$$

e,

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2+1) = 2 \ .$$

Logo, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2$ e então $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$ e ainda, como $f(1) = 1^2+1 = 2$, temos que f e contínua em $x=-1$.

(b) Computemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \ .$$

Se $h > 0$ temos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[(-1+h)^2+1]-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} (-2+h) = -2 \ .$$

Se $h < 0$ temos, utilizando que $f(x) = \frac{2x^2+6x+4}{x+1} = 2(x+2)$, se $x < -1$,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2[(-1+h)+2]-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2 \ ;$$

logo, como estas derivadas laterais são diferentes, não existe $f'(-1)$ ■

4. Compute as derivadas das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{e^x + \text{tg } x}{x^4 + \ln\ x}$.

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

   Resolução:

   Temos,

   (a)

$$f'(x) = \frac{(e^x + \sec^2 x)(x^4 + \ln\ x) - (e^x + \mathrm{tg\,x})(\mathrm{4x^3 + \frac{1}{x}})}{(x^4 + \ln\ x)^2} \ .$$

   (b)

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{3(x+1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad \blacksquare$$

5. Determine $a > 0$ para que as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-a)^2 + y^2 = 1$ se interceptem ortogonalmente [duas curvas se interceptam ortogonalmente em (x_0, y_0) se as retas tangentes às curvas, neste ponto, são perpendiculares]. Sugestão: Esboce as circunferências.

Resolução:

Sejam C_1 e C_2, segundo a ordem de surgimento, as circunferências acima. Se $P = (p, q)$ é um ponto de intersecção de C_1 e C_2 então

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \text{e} \quad 1 = (p-a)^2 + q^2 = p^2 - 2ap + a^2 + q^2 \,,$$

logo, $0 = a^2 - 2ap = a(a - 2p)$ e $a = 0$ (que descartamos) ou $a = 2p$ e, neste caso, como $-1 \le p \le 1$, temos $-2 \le a \le 2$.

Se $a = \pm 2$ então $p = \pm 1$ e as retas tangentes a C_1 e C_2 em $P = (\pm 1, 0)$ são verticais e não perpendiculares.

Se $a \ne \pm 2$ então $p \ne \pm 1$ e $q \ne 0$ e para a circunferência C_1, em um pequeno intervalo aberto contendo p resolvemos $x^2 + y^2 = 1$ obtendo $y = y(x)$ e temos assim, $x^2 + y(x)^2 = 1$ que derivando acarreta

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \Longrightarrow 2p + 2qy'(p) = 0 \Longrightarrow y'(p) = -\frac{p}{q} \;.$$

Se T é a reta tangente a C_1 por (p, q) temos,

$$T : y - q = m_T(x - p) \;\; , m_T = -\frac{p}{q} \;.$$

Analogamente, para C_2, resolvemos $(x-a)^2 + y^2 = 1$ obtendo $y = y(x)$ para x em um intervalo aberto contendo p obtendo $(x-a)^2 + y(x)^2 = 1$ e, derivando,

$$2(x-a) + 2y(x)y'(x) = 0 \Longrightarrow 2(p-a) + 2qy'(x) = 0 \Longrightarrow y'(p) = -\frac{p-a}{q} \;.$$

Se S é a reta tangente a C_2 por (p, q) temos,

$$S : y - q = m_S(x - p) \;\; , m_S = -\frac{p-a}{q} \;.$$

É óbvio que $T \perp S \Leftrightarrow m_T . m_S = -1 \Leftrightarrow \frac{p(p-a)}{q^2} = -1 \Leftrightarrow p^2 - ap = -q^2 \Leftrightarrow p^2 + q^2 = ap \Leftrightarrow ap = 1 \Leftrightarrow a\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$ ■

6. Esboce a cônica

$$4x^2 - 16x + 8y - y^2 - 4 = 0$$

e identifique seus elementos: eixos, semi-eixos, focos, centro, diretrizes e assíntotas.

Resolução:

Temos,

$$4x^2-16x+8y-y^2-4 = 4(x^2-4x)-(y^2-8y)-4 = 4[(x-2)^2-4]-[(y-4)^2-16]-4$$

$$= 4(x-2)^2 - 16 - (y-4)^2 + 16 - 4 = 4(x-2)^2 - (y-4)^2 - 4 \ .$$

Logo, a equação dada equivale a

$$(x-2)^2 - \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1 \ .$$

Temos então a equação de uma hipérbole com:

(i) centro: $(2, 4)$

(ii) vértices: $(1, 4)$ e $(3, 4)$

(iii) focos: $(2 + \sqrt{5}\,, 4)$ e $(2 - \sqrt{5}, 4)$

(iv) assíntotas: as retas $y - 4 = 2(x - 2)$ e $y - 4 = -2(x - 2)$

(v) eixo principal a reta $y = 4$

(vi) eixo conjugado, ou imaginário, ou transverso: a reta $x = 2$

(vii) excentricidade: $e = \sqrt{5}$ ■