$6^{\underline{a}}$ Lista de Cálculo I - MAT144 - IO
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Esboce (sem analisar derivadas) o gráfico e discuta a continuidade da função:

   a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 9}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{4-x}}$

   c) $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x)}$ d) $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}\ , \quad x \neq 0$ f) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-6x-7}}$

2. Calcule:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1}$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+2x)^{x}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+2x)^{1/x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

3. Mostre que $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a \quad , \quad \text{se} \quad a>0 \ \text{ e } \ a\neq 1.$

4. Calcule:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{5^x-1}{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{3^x-1}{x^2}$

5. Calcule $f'(p)$, pela definição, sendo dados:

   a) $f(x) = x^2 + x,\ p = 1$ b) $f(x) = \sqrt{x},\ p = 4$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ p = 1$ d) $f(x) = 2x^3 - x^2,\ p = 1$

6. Esboce o gráfico das funções abaixo e mostre que:

   a) $g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ -x+4, & x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $p = 1$

   b) $g(x) = \begin{cases} x^2+2, & x < 1 \\ 2x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ é derivável em $p = 1$

7. Calcule $g'(x)$ sendo g dada por:

   a) $g(x) = \sqrt[4]{x}$ b) $g(x) = \sqrt[6]{x}$

   c) $g(x) = \sqrt[8]{x}$ d) $g(x) = \sqrt[9]{x}$

8. Ache a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

9. Ache a equação da reta tangente ao gráfico (esboce o gráfico e a reta) de

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $p = 2$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no ponto $p = 1$.

   (c) $f(x) = e^x$, no ponto $p = 0$.

   (d) $f(x) = \ln x$ no ponto $p = 1$.

10. Se $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

    (a) Se $f(x) = a^x$, mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

    (b) Seja $g(x) = \log_a x$ Mostre que $g'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

11. Calcule $f'(x)$.

    a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 5^x$

    c) $f(x) = \pi^x$ d) $f(x) = e^x$

12. Calcule $g'(x)$.

    a) $g(x) = \log_3 x$ b) $g(x) = \log_5 x$

    c) $g(x) \log_\pi x$ d) $g(x) = \ln x$

13. Calcule $f'(p)$ para:

a) $f(x) = \text{sen}x,\ p = \dfrac{\pi}{4}$

b) $f(x) = \cos x,\ p = \dfrac{\pi}{3}$

c) $f(x) = \text{tg}\ x,\ p = \dfrac{\pi}{3}$

d) $f(x) = \text{cotg}\, x,\ p = \dfrac{\pi}{4}$

e) $f(x) = \sec x,\ p = 0$

f) $f(x) = \text{cossec}\, x,\ p = \dfrac{\pi}{2}$

14. Calcule $f'(x)$.

a) $f(x) = 3x^2 + 5$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

d) $f(x) = 3x + \sqrt{x}$

e) $f(x) = 5 + 3x^{-2}$

f) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

g) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2$

j) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

k) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

l) $f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x}$

15. Dê a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$ no ponto $(1, g(1))$.

16. Seja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Esboce o sinal de $f'(x)$;

b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

c) Esboce, utilizando as informações acima, o gráfico de f.

17. Calcule $f'(x)$ onde $f(x)$ é igual a:

a) $\dfrac{x}{x^2+1}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x^2+3}{5x-3}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

e) $5x + \dfrac{x}{x-1}$

f) $\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^3+2}$

18. Seja $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, esboce o gráfico de g, utilizando (a), (b) e (c).

    a) Determine os pontos do gráfico de g em que as retas tangentes, nestes pontos, são paralelas ao eixo x;

    b) Estude o sinal de $g'(x)$;

    c) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$;

19. Calcule $f'(x)$, com $f(x)$ igual a:

    a) $3x^2 + 5\cos x$

    b) $\dfrac{\cos x}{x^2+1}$

    c) $x \operatorname{sen} x$

    d) $x^2 \operatorname{tg} x$

    e) $\dfrac{x+1}{\mathrm{tgx}}$

    f) $\dfrac{3}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

    g) $\dfrac{\sec x}{3x+2}$

    h) $\cos x + (x^2+1)\operatorname{sen} x$

    i) $\sqrt{x} \sec x$

    j) $3\cos x + 5 \sec x$

    k) $x \operatorname{cotg} x$

    l) $4 \sec x + \operatorname{cotg} x$

    m) $x^2 + 3x \operatorname{tg} x$

    n) $\dfrac{x^2+1}{\sec x}$

    o) $\dfrac{x+1}{x \operatorname{sen} x}$

    p) $\dfrac{x}{\operatorname{cossec} x}$

    q) $(x^3 + \sqrt{x}) \operatorname{cossec}(x)$

    r) $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$

20. Calcule $f'(x)$, com $f(x)$ igual a:

    a) $x^2 e^x$

    b) $3x + 5 \ln x$

    c) $e^x \cos x$

    d) $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

    e) $x^2 \ln x + 2e^x$

    f) $\dfrac{x+1}{x \ln x}$

    g) $4 + 5x^2 \ln x$

    h) $\dfrac{e^x}{x^2+1}$

    i) $\dfrac{\ln x}{x}$

    j) $\dfrac{e^x}{x+1}$

21. Sejam f, g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$