

**Curso: MAT 144 - CÁLCULO I - IO**  
**Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira**  
**Período: Primeiro Semestre de 2010**

**LISTA 0 - GABARITO**

**1. Binômio de Newton**

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

**Solução 1** (Combinatória) Por convenção  $0! = 1$  e portanto,  $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Temos,  $(a + b)^n = (a + b)(a + b)\dots(a + b) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \dots + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n$  com os coeficientes  $c_i \in \mathbb{N}$ . “Imaginando”  $n$  caixas, cada uma só com os elementos  $a$  e  $b$ , cada parcela do desenvolvimento de  $(a + b)^n$  pode ser vista como oriunda de  $n$ -retiradas, uma de cada caixa, ou de  $a$  ou de  $b$ . O número de “formas” que é possível retirar  $a$   $n$ -vezes para formar  $a^n$  é, evidentemente 1. Logo,  $c_n = 1$ . Formamos  $a^p b^{n-p}$  retirando  $a$   $p$  vezes e para tal temos na primeira retirada  $n$  possíveis caixas, na segunda  $n - 1$  e na  $p$ -ésima retirada  $n - p + 1$  possíveis caixas. O número de repetições, por não importar a caixa de onde retiramos  $a$  é  $p!$ . Assim, o coeficiente de  $a^p b^{n-p}$  é  $\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ .

**Solução 2** (Indução) Seja  $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{a fórmula é verdadeira}\}$ . Provemos  $X = \mathbb{N}$ .

Caso  $n = 1$ : temos  $(a + b)^1 = a + b$  e  $\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^p b^{1-p} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b$ . Logo,  $1 \in X$ .

(Passo de indução) Suponhamos a fórmula válida para  $m \in \mathbb{N}$  e provemo-la para  $m + 1$ .

Temos  $(a + b)^{m+1} = (a + b)(a + b)^m$  e, por hipótese de indução  $[(a + b)^m = \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p b^{m-p}]$ ,

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (a + b) \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p b^{m-p} = a \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p b^{m-p} + b \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p b^{m-p} = \\ &= \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^{p+1} b^{m-p} + \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p b^{m+1-p} . \end{aligned}$$

No primeiro dos dois últimos somatórios acima fazemos a substituição  $i = p + 1$ . No segundo apenas trocamos a letra  $p$  por  $i$ . Obtemos assim,

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= \sum_{i=1}^{i=m+1} \binom{m}{i-1} a^i b^{m+1-i} + \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} a^i b^{m+1-i} = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{i=m} \binom{m}{i-1} a^i b^{m+1-i} + a^{m+1} b^0 \right] + \left[ a^0 b^{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m} \binom{m}{i} a^i b^{m+1-i} \right] = \\ &= a^{m+1} b^0 + \sum_{i=1}^{i=m} \left[ \binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} \right] a^i b^{m+1-i} + a^0 b^{m+1} . \end{aligned}$$

Por último,

$$\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} = \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!} \left[ \frac{1}{m-i+1} + \frac{1}{i} \right] = \frac{(m+1)m!}{i(i-1)!(m-1)!} = \binom{m+1}{i} \blacksquare$$

2. **Progressão Geométrica**  $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Prova** Somando as equações,

$$\begin{cases} s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ -as_n = -a - a^2 - \dots - a^n - a^{n+1}, \end{cases}$$

obtemos  $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$  ■

3. **Uma Fatoração Polinomial**  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Solução 1** É claro que  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = x^n - 1$ .

**Solução 2** Pelo ítem 2,  $1 - a^{n+1} = (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Trocando o sinal na equação e ainda  $a$  por  $x$  e, pondo  $m = n + 1$  temos,

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

4. **Um Produto Notável**  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Prova** Substituindo  $x = \frac{a}{b}$  na identidade  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  obtemos,

$$\frac{a^n}{b^n} - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \dots + \frac{a^{n-i}}{b^{n-i}} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right).$$

Multiplicando a equação acima por  $b^n$  nos dá,

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= \left(\frac{a}{b} - 1\right) b^n \left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \dots + \frac{a^{n-i}}{b^{n-i}} + \dots + \frac{a}{b} + 1\right) = \left(\frac{a}{b} - 1\right) (a^{n-1}b + \dots + a^{n-i}b^i + \dots + ab^{n-1} + b^n) = \\ &= \frac{a-b}{b} (a^{n-1}b + \dots + a^{n-i}b^i + \dots + ab^{n-1} + b^n) = (a-b)(a^{n-1} + \dots + a^{n-i}b^{i-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. **Teorema** Todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais têm ao menos uma raiz real.

**Prova** Basta verificarmos “Se  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ , é um polinômio com coeficientes reais de grau  $n \geq 1$  sem raízes reais então  $\text{grau}(P)$  é par”.

**Verificação** Como o conjugado da soma e do produto de números em  $\mathbb{C}$  é a respectiva soma e produto dos conjugados e o conjugado de  $x \in \mathbb{R}$  é  $x$ , dada uma raiz  $z \in \mathbb{C}$  temos,

$$0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = P(\bar{z}).$$

Logo,  $\bar{z}$  é raiz de  $P$ ,  $z \neq \bar{z}$  pois  $z \notin \mathbb{R}$  e,  $Q(x) = (x-z)(x-\bar{z})$  divide  $P$ . Porém,  $Q(x) = x^2 - \bar{z}x - zx + |z|^2 = x^2 - (\bar{z} + z)x + |z|^2 = x^2 - 2\text{Re}(z)x + |z|^2$  têm coeficientes reais e assim,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  também. Donde, é fácil ver,  $z$  e  $\bar{z}$  têm igual multiplicidade. Logo, se  $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_k, \bar{z}_k$  são as raízes de  $P$ , sem repetição,  $m_i$  a multiplicidade de  $z_i$ , então  $P(x) = a_n (x-z_1)^{m_1} (x-\bar{z}_1)^{m_1} \dots (x-z_k)^{m_k} (x-\bar{z}_k)^{m_k}$  e  $n = m_1 + m_1 + \dots + m_k + m_k$  é par ■

6. **Raízes de**  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   $n \geq 1$ , **com coeficientes,  $a_i$ , inteiros:**

(i) Se  $\alpha \in \mathbb{Z}$  é raiz então  $\alpha | a_0$ .

(ii) Se  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  é raiz,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , então  $p$  divide  $a_0$  e  $q$  divide  $a_n$ .

**Prova** (i) Sendo  $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$  temos,

$$a_0 = -a_n \alpha^n - a_{n-1} \alpha^{n-1} - \dots - a_1 \alpha.$$

Assim, como  $\alpha | a_n \alpha^n, \dots, \alpha | a_1 \alpha$  então  $\alpha | -(a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha) = a_0$ .

(ii) Mostremos primeiro que  $p | a_0$ . Temos,  $0 = P(\frac{p}{q}) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_1 \frac{p}{q} + a_0$ . Logo,

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n.$$

Como  $p$  divide  $a_n p^n, a_{n-1} p^{n-1} q, \dots, a_1 p q^{n-1}$  então  $p | -(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1})$ .

Isto é,  $p | a_0 q^n$  e portanto, como  $\text{mdc}(p, q) = 1$ ,  $p | a_0$ .

Ainda,  $q$  divide  $a_0 q^n, a_1 p q^{n-1}, \dots, a_{n-1} p^{n-1} q$  e então  $q | -(a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)$ .

Isto é,  $q | a_n p^n$  e assim, como  $\text{mdc}(p, q) = 1$ ,  $q | a_n$  ■

7. Resolva algumas equações de segundo grau sem a **fórmula de Baskhara** e então prove-a.

**A fórmula** Seja  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , uma equação do segundo grau em  $x$ . Temos,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Logo,  $x$  é raiz se, e só se,  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ ,  $\Delta = b^2 - 4ac$  e extraindo a raiz quadrada complexa, que admite dois valores se o radicando é não nulo, obtemos,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

qualquer que seja a escolha feita para  $\sqrt{\Delta}$ . Consequentemente,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \blacksquare$$

8. Sejam  $\alpha, \beta$  em  $\mathbb{R}$ .

$$(a) \quad \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta - \text{sen}\beta \cos\alpha \quad (b) \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta.$$

$$(c) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta \quad (d) \quad \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \text{sen}\beta \cos\alpha.$$

9. **Desigualdade Triangular**  $|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .

**Prova** Prova É claro que para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos  $x \leq |x|$  e  $-x \leq |x|$ . Logo,

$$\begin{cases} a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + |b|, \\ a + b \leq 0 \implies |a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b| \quad \blacksquare \end{cases}$$

10. O número  $\sqrt{2}$  é irracional.

**Prova** (Por Absurdo) É claro que se  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p^2$  é par  $\Leftrightarrow p$  é par ( $p^2$  ímpar  $\Leftrightarrow p$  é ímpar).

Suponhamos, por absurdo,  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Então, existem  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , com  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

Logo, elevando ao quadrado,  $p^2 = 2q^2$  e assim,  $p^2$  é par,  $p$  é par e existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $p = 2m$ . Substituindo temos  $\sqrt{2} = \frac{2m}{q}$  que, também quadrando, nos dá,  $2q^2 = 4m^2$  e, simplificando,  $q^2 = 2m^2$ . Logo,  $q$  é também par e então 2 divide  $p$  e  $q$   $\nmid$

11. Mostre, no **plano de Argand-Gauss**, que se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a^2 + b^2 = 1$ , existe um único  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que,

$$z = \cos\theta + i\text{sen}\theta .$$

12. Se  $z_1 = \cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1$  e  $z_2 = \cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2$  então,

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) .$$

**Prova** Temos, pelos itens 8(c) e 8(d),

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2) = \\ &= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13. Definindo  $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$  (**Fórmula de Euler**) temos a **Fórmula de Moivre**,

$$z^n = (\cos\theta + i\text{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta) = e^{in\theta}, \forall n \in \mathbb{N} .$$

**Prova** Consequência imediata do item anterior  $\blacksquare$

14. Se  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , o **módulo** de  $z$  é  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e o **conjugado** é  $\bar{z} = a - ib$ .

- (a) Se  $z \neq 0$  então  $\exists ! \theta \in \mathbb{R}$ , módulo  $2\pi$ , tal que  $z = |z|e^{i\theta}$ .
- (b) Represente  $z$ ,  $\theta$ ,  $|z|$  e  $\bar{z}$  (simétrico a  $z$  em relação ao eixo real).
- (c)  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$ ,  $|\text{Re}(z)| \leq |z|$  e  $|\text{Im}(z)| \leq |z|$ .
- (d) Para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  e  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- (e) Se  $|z| = 1$ ,  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , então  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ .

**Prova**

- (a) Basta aplicar o item 11 a  $\frac{z}{|z|}$ .
- (c) Segue de  $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$  e  $\bar{\bar{z}} = z$ .
- (d) A primeira identidade deixamos ao leitor. A segunda segue da primeira e do item (c) pois,  $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$ .
- (e) Claramente,  $\bar{z} = e^{i\theta} = \overline{\cos\theta + i\text{sen}\theta} = \cos\theta - i\text{sen}\theta = \cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta) = e^{-i\theta}$  ■

15. **Desigualdade Triangular:**  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

**Prova** Pelos ítems 14(c) e 14(d),

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

16. Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , com  $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$  então,  $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ .

**Prova** Consequência imediata do item 12 ■

17. Se  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $\omega = a + ib$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $|\omega| = 1$ , então,

$$\exists \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \bar{\omega} = a - ib.$$

**Prova** Segue de  $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\omega|^2 = 1$  ■

18. Sejam  $\omega_2 = x_2 + iy_2 = e^{i\theta_2}$  e  $\omega_1 = x_1 + iy_1 = e^{i\theta_1}$ , com  $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , números complexos unitários (isto é, de comprimento 1). Então,

$$(a) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i(\theta_2-\theta_1)} = \cos(\theta_2 - \theta_1) + i\text{sen}(\theta_2 - \theta_1),$$

$$(b) \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

**Prova** (a) Pelos ítems 14(e) e 12 temos,  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i\theta_2}(e^{i\theta_1})^{-1} = e^{i\theta_2}e^{-i\theta_1} = e^{i(\theta_2-\theta_1)}$ .

(b) Segue imediatamente do item 17 ■

19. **Fórmula para o ângulo entre as representações dos números  $z_1$  e  $z_2$  em  $\mathbb{C}^*$ ,**

$z_j = x_j + iy_j = |z_j|e^{i\theta_j}$ , com  $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ , para  $j = 1, 2$ ,

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_1||z_2|}.$$

**Prova** Segue de 18, (a) e (b), aplicado a  $\omega_2 = \frac{x_2}{|z_2|} + \frac{y_2}{|z_2|}i$  e  $\omega_1 = \frac{x_1}{|z_1|} + \frac{y_1}{|z_1|}i$ .

20. **Distância de Ponto a Reta** A equação geral de uma reta no plano cartesiano é:  $D$  :

$ax + by + c = 0$ ;  $a$  ou  $b$  não nulo. Dado  $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ , a distância de  $P_o$  à reta  $D$  é :

$$|\overline{PD}| = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Prova** Notemos  $m_r$  o coeficiente angular de uma reta  $r$ . As retas  $S$  perpendiculares a  $D$  tem coeficiente angular  $m_S$ ,  $m_S \cdot m_D = -1$  e, introduzindo um parametro  $d$ , equação geral:  $S : -bx + ay + d = 0$ ,  $d \in \mathbb{R}$  e entre tais a por  $P_o = (x_o, y_o)$  é tal que  $d = bx_o - ay_o$ . Isto é,

$$S_{P_o} : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0.$$

Determinemos  $P_1 = (x_1, y_1) = D \cap S_{P_o}$  resolvendo,

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by = -c, \\ -bx + ay = ay_o - bx_o. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $a$ , a segunda por  $-b$ , e então somando-as temos,

$$x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2x_o - aby_o - ac) \text{ e,}$$

analogamente, multiplicando a primeira por  $b$  e a segunda por  $a$  e somando-as,

$$y_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc).$$

Computemos agora o quadrado da distância de  $P_o = (x_o, y_o)$  a  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,

$$\begin{aligned} |\overline{P_oP_1}|^2 &= [x_o - \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2x_o - aby_o - ac)]^2 + [y_o - \frac{1}{a^2 + b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc)]^2 = \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2x_o + aby_o + ac)^2 + (abx_o + b^2y_o + bc)^2] = \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [a^2(ax_o + by_o + c)^2 + b^2(ax_o + by_o + c)^2] = \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 + b^2)(ax_o + by_o + c)^2] = \frac{(ax_o + by_o + c)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

**Segunda Prova** Reescrevendo (\*) na notação matricial temos,

$$(**) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

É fácil constatar que se  $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é inversível, ela e sua inversa são relacionadas por,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução de (\*\*) é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2 + b^2}(-ac - aby_o + b^2x_o) \\ \frac{1}{a^2 + b^2}(-bc + a^2y_o - abx_o) \end{bmatrix}.$$

A prova agora segue como a anterior ■