

FRAÇÕES PARCIAIS¹

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES SIMPLES

Idéia. Consideremos uma divisão de polinômios

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

ambos com coeficientes reais e, ainda, $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$. O objetivo é escrever este quociente como um **somatório** de parcelas “bem mais simples”. Procedemos da seguinte forma. Decompondo o polinômio Q como um produto de fatores lineares do tipo $(x - \alpha)^m$, com α uma raiz real de Q e $m = m(\alpha)$ a multiplicidade algébrica de tal raiz de Q , e também de fatores quadráticos $(x^2 + ax + b)^n$, onde o polinômio $x^2 + bx + c$ não tem raízes reais (discriminante negativo) e n é a multiplicidade algébrica de tal polinômio, temos que:

(1) Cada fator linear $(x - \alpha)^m$ gera as m parcelas (no somatório procurado)

$$\frac{C_1}{(x - \alpha)}, \dots, \frac{C_m}{(x - \alpha)^m},$$

onde C_1, \dots, C_m são constantes reais a serem determinadas.

(2) Cada fator quadrático $(x^2 + bx + c)^n$ gera as n parcelas (no referido somatório)

$$\frac{A_1x + B_1}{(x^2 + bx + c)}, \dots, \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + bx + c)^n},$$

onde as constantes $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$ são reais e a serem determinadas.

¹O teorema que segue baseia-se em dois resultados em “Analysis by Its History, E. Hairer and G. Warner, Undergraduate Texts in Mathematics, 1996, pp. 118-123, Springer-Verlag, New York”. Os exemplos (dois deles do citado livro) são, entre outras formas, aqui resolvidos inspirando-nos no chamado **método de Heaviside**, vide “Cálculo, Vol 1, pp. 568-569, G. B. Thomas, Addison Wesley, 2009”.

(3) A resposta procurada (isto é, o somatório) é então: o quociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma soma de parcelas do tipo das obtidas no (1) e no (2) passos acima.

(4) Para determinarmos as constantes reais surgidas existem vários métodos.

Exemplo 1. Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Resolução: Efetuando a divisão polinomial obtemos uma função racional com o grau do polinômio numerador menor que o no denominador, e fatorando este,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Pelo método acima (Teorema da Decomposição em Frações Simples) temos,

$$(*) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando (*) por $(x-1)^3$ e então computando em $x = 1$ obtemos $A_3 = 1$.

Multiplicando (*) por $(x+2)^2$ e então computando em $x = -2$ obtemos $B_2 = -1$.

Pondo os termos $1(x-1)^{-3}$ e $-1(x+2)^{-2}$ à direita à esquerda e simplificando,

$$(**) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19 + (x-1)^3 - (x+2)^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{6x^2 - 5x - 7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando (**) por $(x-1)^2$ e, aí, avaliando a fração central em $x = 1$: $A_2 = -2$.

Multiplicando (**) por $(x+2)$ e, aí, avaliando a fração central em $x = -2$: $B_1 = 3$.

Pondo, em (**), os termos $-2(x-1)^{-2}$ e $3(x+2)^{-1}$ à direita no meio e simplificando:

$$\frac{6x^2 - 5x - 7 + 2(x+2) - 3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3}{x-1} = \frac{A_1}{x-1} \Rightarrow A_1 = 3.$$

Resposta: $\frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$ ■

Antes de darmos mais exemplos provemos o resultado.

Demonstração do Teorema da Decomposição em Frações Parciais

Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e na variável x .

Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ com r distintos pares de raízes complexas conjugadas (não reais) $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$ e s distintas raízes reais $\gamma_1, \dots, \gamma_s$. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)² podemos fatorar Q em seus fatores lineares e quadráticos, com suas respectivas multiplicidades algébricas, e obtemos

$$Q(x) = c \prod_{j=1}^r \left((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{m_j} \prod_{j=1}^s (x - \gamma_j)^{n_j}, \quad c \in \mathbb{R},$$

onde m_j e n_j são as multiplicidades das raízes complexas e reais, respectivamente.

Teorema 1. Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ como acima e $P = P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$. Existem, e são únicos, números reais A_{jk} , B_{jk} e C_{jk} tais que

$$(1.1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk} + B_{jk}x}{\left((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(x - \gamma_j)^k}.$$

Prova:

Afirmção 1: Se γ é raiz real de multiplicidade n de $Q = Q(x)$ fatoramos $Q(x) = (x - \gamma)^n q(x)$, com $q \in \mathbb{R}[x]$ e $q(\gamma) \neq 0$, e existem únicos $C \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[x]$, com $\partial(p) < \partial(Q) - 1$, satisfazendo

$$(1.2) \quad \frac{P(x)}{(x - \gamma)^n q(x)} = \frac{C}{(x - \gamma)^n} + \frac{p(x)}{(x - \gamma)^{n-1} q(x)}.$$

²D'Alembert em 1746 e que à época procurava métodos para integrar funções racionais apresentou uma prova do TFA que foi, à época, considerada não válida e que hoje é válida. Gauss em 1799 apresentou a mais famosa prova de tal teorema e Argand em 1814 mostrando a eficiência dos números complexos simplificou, e muito, a prova de D'Alembert e apresentou a mais clara e curta prova do TFA, até a atualidade.

Verificação da Afirmação 1.

Multiplicando (1.2) pelo denominador comum, temos a equação polinomial

$$P(x) = Cq(x) + p(x)(x - \gamma).$$

Avaliando em $x = \gamma$ temos $C = \frac{P(\gamma)}{q(\gamma)}$ e definimos $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ como a divisão (exata) de $P(x) - Cq(x)$ por $(x - \gamma)$. As unicidades de C e $p = p(x)$ são óbvias.

Afirmação 2. Se $Q(x) = \left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^m q(x)$ e $q(\alpha + i\beta) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, existem únicos $A, B \in \mathbb{R}$ e polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$, $\text{grau}(p) < \text{grau}(Q) - 2$, tais que

$$\frac{P(x)}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^m q(x)} = \frac{A + Bx}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^m} + \frac{p(x)}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^{m-1} q(x)}.$$

Verificação da Afirmação 2.

Multiplicando pelo denominador comum, resolvemos a equação polinomial

$$P(x) = (A + Bx)q(x) + p(x)\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right).$$

Avaliando tal fórmula em $z_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (ou $z_0 = \alpha - i\beta$) determinamos A e B reais³ e definimos $p(x)$ como a divisão exata, em $\mathbb{R}[x]$, de $P(x) - (A + Bx)q(x)$ por $\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)$. A unicidade é elementar e encerra tal verificação.

Claramente, por sucessivas aplicações das Afirmações 1 e 2 obtemos (1.1). Pedimos ao leitor mostrar, é trivial, que a unicidade dos coeficientes em (1.1) (vide abaixo outra prova de tal fato) segue das unicidades nas Afirmações 1 e 2 ■

³Pela equação $A + B(\alpha + i\beta) = \frac{P(z_0)}{q(z_0)} \in \mathbb{C}$ temos $A + B\alpha = \text{Re}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right)$ e $B\beta = \text{Im}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right)$. Se utilizarmos $z = \alpha - i\beta$ o resultado é o mesmo pois para tais $A, B \in \mathbb{R}$: $A + B\bar{z}_0 = \overline{A + Bz_0} = \overline{\frac{P(z_0)}{q(z_0)}}$

Mostremos uma variação do **Método de Heaviside** (assim dito se $Q(x)$ só tem raízes reais simples) para determinar (unicamente) os coeficientes em (1.1).

Computemos os coeficientes $C_{1n_1}, C_{1,n_1-1}, \dots, C_{1,2}, C_{1,1}$, nesta ordem.

Utilizando a fatoração $Q(x) = (x - \gamma_1)^{n_1} Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$, $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, multipliquemos (1.1) por $(x - \gamma_1)^{n_1}$ e computemos a equação obtida em $x = \gamma_1$. Para o 1 membro $\left(\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1} Q_1(x)}\right)$ obtemos, é óbvio, $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}$. Quanto ao 2 membro, multiplicando a parcela $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ por $(x - \gamma_1)^{n_1}$ e computando o resultado em $x = \gamma_1$ obtemos C_{1,n_1} ; todas as demais parcelas ao serem multiplicadas por $(x - \gamma_1)^{n_1}$ e o resultado computado em $x = \gamma_1$ produzem o número zero. Logo, $C_{1,n_1} = \frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}$.

Então, passando $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ ao 1 membro e efetuando a subtração temos uma função racional com numerador e denominador divisíveis por $(x - \gamma_1)$ (Afirm. 1):

$$\frac{P(x)}{(x - \gamma_1)^{n_1} Q_1(x)} - \frac{C_{1,n_1}}{(x - \gamma_1)^{n_1}} = \frac{p_1(x)}{(x - \gamma_1)^{n_1-1} Q_1(x)}, \text{ com } \partial(p_1) < \partial(Q) - 1 .$$

Igualado o último membro acima com o que restou do 2 membro de (1.1), recaímos no caso anterior e então de forma análoga achamos o coeficiente C_{1,n_1-1} . Iterando tal procedimento identificamos os demais coeficientes $C_{1,j's}$. É claro que analogamente obtemos todos os coeficientes $C_{i's,j's}$.

Similarmente (e utilizando a Afirmação 2) obtemos ordenadamente os pares de coeficientes $(A_{i,m_i}, B_{i,m_i}), (A_{i,m_i-1}, B_{i,m_i-1}), \dots, (A_{i,1}, B_{i,1})$, $i = 1, \dots, l$. Verifique■

Exemplo 2. Decomponha em frações simples $\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$.

1 Resolução: Via o que denominamos, aqui, variação do método de Heaviside.

Pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples temos,

$$(*) \quad \frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando (*) por $(x^2+2)^2$ e então computando em $x = i\sqrt{2}$ obtemos

$$\frac{(i\sqrt{2})^5 + i\sqrt{2}}{-1} = Ei\sqrt{2} + F \implies E = -5 \text{ e } F = 0.$$

Pondo à esquerda em (*) o termo $\frac{-5x}{(x^2+2)^2}$ obtido à direita e simplificando temos

$$(**) \quad \frac{x^5+x+5x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Multiplicando (**) por x^2+1 e então computando a expressão no meio em $x = i$:

$$\frac{i^3+3i}{i^2+2} = Ai+B \implies A = 2 \text{ e } B = 0.$$

Multiplicando (**) por x^2+2 e então computando a expressão no meio em $x = \sqrt{2}i$:

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3+3\sqrt{2}i}{-2+1} = C\sqrt{2}i+D \implies C = -1 \text{ e } D = 0.$$

2 Resolução: Escrevemos $P(x) = x^5+x$, $p(x) = (x^2+1)(x^2+2)^2$ e,

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+2)^2}, \forall x \in \mathbb{R},$$

e então, multiplicando ambos os membros por $p(x)$ resulta

$$(x^5+x) = (ax+b)(x^2+2)^2 + (cx+d)(x^2+1)(x^2+2) + (ex+f)(x^2+1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Efetuada as operações indicadas no 2 membro, a igualdade acima se escreve

$$x^5+x = (a+c)x^5+(b+d)x^4+(4a+3c+e)x^3+(4b+3d+f)x^2+(4a+2c+e)x+4b+2d+f, \forall x \in \mathbb{R},$$

e (v. Corolário 3.7) obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

$$\begin{aligned} (1) \quad a+c &= 1, & (2) \quad b+d &= 0, & (3) \quad 4a+3c+e &= 0, & (4) \quad 4b+3d+f &= 0, \\ (5) \quad 4a+2c+e &= 1, & (6) \quad 4b+2d+f &= 1. \end{aligned}$$

De (2) segue $d = -b$ e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente, $b + f = 0$ e $2b + f = 0$ que é visivelmente um sistema determinado; donde, $b = f = 0$ e, então, $d = 0$. De (1) segue $c = 1 - a$ e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente, $a + e = -3$ e $2a + e = -1$; cuja solução é $a = 2$ e $e = -5$ e portanto, $c = 1 - a = 1 - 2 = -1$ donde $c = -1$. Consequentemente,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{5x}{(x^2 + 2)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemplo 3. Decomponha em frações simples $\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$.

Resolução: Via método de Heaviside.

O denominador fatora-se: $(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

Logo, temos

$$(*) \quad \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x + 3}.$$

Multiplicando (*) por $(x + 1)$ e, aí, computando em $x = -1$ temos: $A = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.

Multiplicando (*) por $(x - 1)$ e, aí, computando em $x = 1$ temos: $B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Multiplicando (*) por $(x + 2)$ e, aí, computando em $x = -2$ temos: $C = \frac{5}{3}$.

Multiplicando (*) por $(x + 3)$ e, aí, computando em $x = -3$ temos: $D = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$ ■

Antes de estudarmos o caso em que $Q(x)$ tem raízes não reais revisemos \mathbb{C} .

Revisão de Números Complexos.

Seja $i \in \mathbb{C}$ tal que $i^2 = -1$. Utilizando a **Fórmula de Euler**,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

temos

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Indicando as **coordenadas polares** de $z \in \mathbb{C}$ por $r \in [0, +\infty)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ se:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

vemos que $z = re^{i\theta}$, sendo óbvio que $|e^{i\theta}| = 1$ e conseqüentemente $r = |z|$.

Chamamos $(r, \theta)_o$ de **forma polar** de um número $z \in \mathbb{C}$ e identificamos:

$$z = (r, \theta)_o \quad \text{se} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Desta forma, se $z_1 = (r_1, \theta_1)_o$ e $z_2 = (r_2, \theta_2)_o$ temos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ e

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)_o.$$

Assim, obtemos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{se} \quad z = (r, \theta)_o, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Invertendo tal fórmula obtemos as n -raízes, $n \in \mathbb{N}$, de um número $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$:

Radiciação: Se $n \in \mathbb{N}$ e $z = re^{i\theta} \neq 0$, as n soluções de $\omega^n = z = re^{i\theta}$ são

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{ou}$$

$$\omega_k = \left(\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)_o = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chamamos tais soluções $\omega_k, k = 0, \dots, n-1$, de **raízes n -ésimas de z** .

Exemplo 4. Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

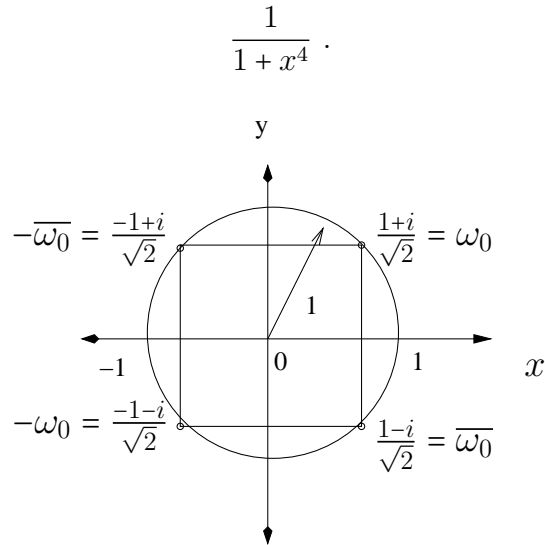


Figura 1: As quatro raízes quartas de $z = -1$.

Três Resoluções: Temos, vide Figura 1 acima,

$$z^4 + 1 = 0 \implies z^4 = -1 = e^{i\pi} \implies z = \omega_k = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})i} = e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3 ;$$

isto é, $z \in \left\{ \omega_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \omega_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\overline{\omega_0}, \omega_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\omega_0, \omega_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \overline{\omega_0} \right\}$.

O polinômio $x^4 + 1$ fatora-se então como

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1),$$

e obtemos pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples,

$$(*) \quad \frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} .$$

1 Resolução: Não aplicando os citados métodos.

É fácil perceber que,

$$A + C = 0 \quad \text{e} \quad B + D = 1 .$$

Ainda, computando a expressão em (*) em $x = i$ obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{Ai+B}{-\sqrt{2}i} + \frac{-Ai+(1-B)}{\sqrt{2}i} = \frac{-2A}{\sqrt{2}} + \frac{1-2B}{\sqrt{2}i} \implies A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2} \implies C = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad D = \frac{1}{2} .$$

2 Resolução: Via método dos coeficientes a determinar (aritmética em \mathbb{R})

Multiplicando por $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ a expressão (*) obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D)x^2 + (A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2})x + (B + D), \end{aligned}$$

e resolvemos o sistema de equações

$$A + C = 0, \quad A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \quad A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0 \quad \text{e} \quad B + D = 1.$$

Substituindo a 1 ($C = -A$) e a 4 equações na 2 temos $2A\sqrt{2} + 1 = 0$ e $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Substituindo a 1 equação na 3 obtemos $B = D$ e, pela 4 equação, $B = D = \frac{1}{2}$.

3 Resolução: Via uma variação do método de Heaviside (aritmética em \mathbb{C}).

Escrevamos $\frac{1}{1+x^4}$ na forma

$$(**) \quad \frac{1}{(x - \omega_0)(x - \bar{\omega}_0) \cdot (x + \bar{\omega}_0)(x + \omega_0)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Multiplicando (**) por $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = (x - \omega_0)(x - \bar{\omega}_0)$ e computando em ω_0 :

$$\frac{1}{2 \operatorname{Re}(\omega_0) \cdot 2\omega_0} = A\omega_0 + B \implies \frac{1}{4 \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1+i) + B \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{2(1+i)} = \frac{1-i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} + B\right) + \frac{A}{\sqrt{2}}i \implies A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando (**) por $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x + \bar{\omega}_0)(x + \omega_0)$ e computando em $-\omega_0$:

$$\frac{1}{-2\omega_0(-\omega_0 - \bar{\omega}_0)} = -C\omega_0 + D \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0 \operatorname{Re}(\omega_0)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(-\frac{C}{\sqrt{2}} + D\right) - \frac{C}{\sqrt{2}}i \implies C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Resposta: $\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \blacksquare$

Por fim, apresentemos o “método das derivadas” (importante em “Teoria de uma Variável Complexa”) que utiliza derivadas em \mathbb{R} para computar os coeficientes em (1.1) correspondentes às parcelas provenientes das raízes reais.

Computemos em (1.1) os coeficientes $C_{1,n_1}, \dots, C_{1,1}$ relativos à raiz γ_1 . Para simplificar escrevamos $n_1 = n$. Então, pela fatoração $Q(x) = (x - \gamma_1)^n Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ e $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, pela expressão em (1.1) temos,

$$\frac{P(x)}{(x - \gamma_1)^n Q_1(x)} = \frac{C_{1,n}}{(x - \gamma_1)^n} + \frac{C_{1,n-1}}{(x - \gamma_1)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{1,1}}{(x - \gamma_1)^1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)},$$

com $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ [e, é fácil ver, $\partial(p_1) < \partial(Q) - n$]. Logo, multiplicando por $(x - \gamma_1)^n$,

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = C_{1,n} + C_{1,n-1}(x - \gamma_1) + C_{1,n-2}(x - \gamma_1)^2 + \dots + C_{1,1}(x - \gamma_1)^{n-1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)}(x - \gamma_1)^n.$$

Computando a equação acima em γ_1 resulta $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} = C_{1,n}$.

Computando a 1ª derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\gamma_1) = C_{1,n-1}$.

Computando a 2ª derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)''(\gamma_1) = 2C_{1,n-2}$.

Por indução finita, computando a k -ésima derivada, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, da equação acima em γ_1 obtemos: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1) = k!C_{1,n-k}$. Isto é, $C_{1,n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1)$.

Exemplo 5. Decomponha em frações simples $\frac{x^2}{(x-1)^3}$.

Três resoluções:

1 Resolução: Não aplicando os citados métodos.

Temos,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{[(x-1)+1]^2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

2 Resolução: Via método dos coeficientes a determinar.

Multiplicando por $(x-1)^3$ a decomposição

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

obtemos $x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)$. Logo, $A = 1$, $B = 2$ e $C = 1$.

3 Resolução: Empregando derivadas.

Basta computar mos as derivadas de ordem 0, 1 e 2 de $F(x) = x^2$ em $x = 1$.

Logo,

$$C = \frac{F(1)}{0!} = 1, \quad B = \frac{F'(1)}{1!} = 2 \quad \text{e} \quad A = \frac{F''(1)}{2!} = 1 \quad \blacksquare$$

Existem ainda outros métodos para decompor uma função racional em soma de frações simples. Cada qual tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão e, é claro, de preferências individuais. Ainda, é conveniente ser “criativo”.