MAT144 - Cálculo I - IOUSP
REVISÃO/NÚMEROS COMPLEXOS - 1º semestre/2010
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Determine a forma algébrica $z = a + bi$, a e b em $\mathbb{R}$, dos números $z \in \mathbb{C}$ abaixo:

a) $z = (1+i)^3$ b) $z = (2+3i)^2$ c) $z = \dfrac{2}{3+i}$

d) $z = \dfrac{i}{2-i}$ e) $z = \frac{2+i}{3-i}$ f) $z = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

- Seja z e w números complexos arbitrários. Valem as propriedades:
  (a) $\overline{\overline{z}} = z$ (a operação inversa da conjugação é a própria operação conjugação)
  (b) $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$ (o conjugado de um produto é igual ao produto dos conjugados)
  (c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (o conjugado de uma soma é igual à soma dos conjugados)

- Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com a e $b \in \mathbb{R}$. Valem as propriedades:
  (a) $z\overline{z} = a^2 + b^2$
  (b) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ é a distância do ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ à origem $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

- Valem as propriedades abaixo da função **módulo**, $|\,.\,| : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$:
  (a) $|\overline{z}| = |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
  (b) $|zw| = |z|\,|w|$, $\forall z\,, w \in \mathbb{C}$.
  (c) $|z+w| \leq |z| + |w|$, $\forall z\,, w \in \mathbb{C}$ (**desigualdade triangular**).

- Se $|z| = 1$ então existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

- Para um arbitrário $z \in \mathbb{C}^*$ temos,
  (a) $\frac{z}{|z|}$ tem módulo 1.
  (b) Existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $z = |z|(\cos\theta \,+\, i\sin\theta)$.

  Definições: Se $z \in \mathbb{C}^*$ é tal que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, com $\theta \in \mathbb{R}$, dizemos que

$$(r, \theta)_o$$

  é uma **forma (ou representação) polar ou trigonométrica** de z, sendo $r = |z|$ o módulo de z e $\theta \in \mathbb{R}$ um **argumento** de z (existem infinitos argumentos).

Notação: $z = (|z|\,, \theta)_o$.

- Para a multiplicação e a potenciação temos as propriedades abaixo:
  (a) Se $z_1 = (\rho_1\,,\theta_1)_o$ e $z_2 = (\rho_2\,,\theta_2)_o$, **a multiplicação** z_1z_2 **na forma polar** é
  $$z_1z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)\ +\ i\sin(\theta_1+\theta_2)] = (\rho_1\,\rho_2\,,\theta_1+\theta_2)_o\ .$$
  (b) (**Fórmula de Moivre**) Se $z = \rho(\cos\theta\ +\ i\sin\,\theta) = (\rho,\theta)_o$ então
  $$z^n = \rho^n(\cos n\theta\ +\ i\sin\,n\theta) = (\rho^n\,,n\theta)_o\ \ ,\forall n\in\mathbb{Z}\ .$$
- **Notação de Euler:** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$.

QUESTÕES DE VESTIBULARES

1. Determine o inverso de $z = 2+i$.
2. Resolva, em z, a equação $i\overline{z}+2z+1-i=0$.
3. Determine o módulo e um argumento de $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.
4. Determine $z\in\mathbb{C}$ tal que $(\overline{z})^2 = z^2$.
5. Considere os complexos $u = 4+i$, $v = 2+3i$ e $w = 6+4i$, cujos denominados **afixos** são os pontos $P = (4,1)$, $Q = (2,3)$ e $R = (6,4)$ no plano de Argand-Gauss, respectivamente. Se O é a origem deste sistema de coordenadas, determine a área do quadrilátero $OPRQ$.
6. Determine a forma algébrica de $z = \frac{i^{2003}-i}{i-1}$.
7. Ache a área do polígono cujos vértices são os afixos das raízes de $p(z) = z^6-1$.
8. Ache a área do polígono cujos vértices são os afixos das raízes de $p(z) = z^3-8$.
9. A representação no plano complexo dos números z tais que a parte real de z^2 é igual a 2 é classificada como:

   (a) hipérbole (b) elipse (c) circunferência (d) reta (e) parábola .

DESAFIOS

10. (UF-BA) Se a_n é a parte real de $\left(\frac{i}{3}\right)^n$, para cada $n\in\mathbb{N}$, compute
$$S = a_0+a_1+...+a_n\ .$$
11. (FUVEST) Dada a equação $z^2 = \alpha z+(\alpha-1)\overline{z}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\overline{z}$ o conjugado de z,
    (a) determine os valores de α tais que a equação tem quatro raízes distintas,
    (b) represente no plano complexo as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.
12. Existe um polinômio com coeficientes inteiros que tem $\sqrt{11}+\sqrt{17}$ como raíz ? Em caso afirmativo, escreva um de grau mínimo.
13. Os coeficientes $a\,,b\,,c$ e d do polinômio $P(x) = ax^5+bx^3+cx+d$, de grau 5, formam, nesta ordem, uma PG. Dividindo-se $P(x)$ por $x+1$, obtém-se como quociente um polinômio $Q(x)$. Os coeficientes dos termos de $Q(x)$ cujos graus são 2, 0 e 4, respectivamente, formam uma P.A. cuja soma dos termos é 18. Determine $P(x)$.

Referência: G. Iezzi, O. Dolce, D. Degenszajn, R. Périgo e N. Almeida, "Matemática, Ciência e Aplicações", vol 3, pp. 141-145 e 169, 4ª edição, 2006, Atual Editora.