$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT143 - Cálculo para Ciências Biomédicas - FCFUSP
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens. Boa Sorte!

1. Calcule $f'(x)$ com:

   a) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x - \cos x}$

   b) $f(x) = x^4\, e^{x^2+1}$.

   Solução:

   (a) $f'(x) = \dfrac{(1+\cos x)(x-\cos x) - (x + \sin\, x)(1 + \sin\, x)}{(x - \cos x)^2}$

   (b) $f'(x) = 4x^3 e^{x^2+1} \ + \ x^4 e^{(x^2+1)} 2x \quad \blacksquare$

2. Calcule $f'(x)$ com:

   a) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

   b) $f(x) = \ln\,|\mathrm{tg\,x}|\,.$

   Solução:

   (a) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\dfrac{2x}{(x-1)^2}$

   (b) $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg\,x}}\,\sec^2 x = \sec^2 x\ \mathrm{cotg}\ x \quad \blacksquare$

3. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\, \sqrt[3]{x^2-x} \; - x \,]$.

Resolução:

(a) Por definição, $x^x = e^{x \ln\, x}$, $x > 0$. Mas,

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln\, x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\, x}{\frac{1}{x}}$$

e $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\, x = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e então, devido à indeterminação "$\frac{\infty}{\infty}$" podemos aplicar a regra de L'Hospital e encontramos

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln\, x = \lim_{x\to 0^+} \; = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

e portanto, devido à continuidade da função exponencial,

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\, x\right)} = e^0 = 1 \; .$$

(b) Pelo produto notável,

$$a - b = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})\, ,$$

obtemos

$$\sqrt[3]{x^3-x} \; - x^3 \; = \sqrt[3]{x^3-x} - \sqrt[3]{x^3} = \frac{(x^3-x)-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-x)^2} + \sqrt[3]{x^3(x^3-x)} + \sqrt[3]{x^6}}$$

$$= \frac{-x}{x^2\left[\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})^2} + \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})} + 1\right]} = \frac{-1}{x\left[\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})^2} + \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})} + 1\right]} \; .$$

Portanto,

$$\lim_{x\to +\infty} [\, \sqrt[3]{x^2-x} \; - x \,] = 0 \quad \blacksquare$$

4. Esboce o gráfico de $f(x) = e^{\frac{1}{t}}$, $t \neq 0$.

Resolução:

(i) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^* = (-\infty\, , 0) \bigcup (0, +\infty)$.

(ii) $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1^+$, $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1^-$ $\lim\limits_{t \to 0^+} e^{\frac{1}{t}} = +\infty$ $\lim\limits_{t \to 0^-} e^{\frac{1}{t}} = 0$.

(iii) $f'(t) = e^{\frac{1}{t}} \cdot \dfrac{(-1)}{t^2} < 0\, , \forall t \in \mathbb{R}^*$;
logo, f é estritamente decrescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$.

(iv) Pela fórmula para a derivada de um produto temos,

$$f''(t) = e^{\frac{1}{t}} \left(\frac{(-1)}{t^2} \right)^2 + e^{\frac{1}{t}} \left((-1)(-2)t^{-3} \right) =$$

$$= e^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^3} \right) = e^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1+2t}{t^4} \right).$$

O sinal de f'', $t \neq 0$, é o mesmo que o de $1 + 2t$, $t \neq 0$. Assim,

$$f'' < 0 \text{ se } t < -\frac{1}{2}\, , \qquad\qquad f'' > 0 \text{ se } t > -\frac{1}{2}\, .$$

Logo, as concavidades de f são:
para baixo em $(-\infty, -\frac{1}{2})$ e para cima em $(-\frac{1}{2}, 0)$ e em $(0, +\infty)$.

(v) A função f não tem máximo nem mínimo local.
O ponto $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ é o único ponto de inflexão, e é oblíquo pois $f'(-\frac{1}{2}) \neq 0$ ■

5. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2$

Resolução:

Notemos que $x = 0$ é raíz dupla e assim f tem no máximo mais três raízes reais,

$$f(x) = x^2(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1) \ .$$

(i) O domínio de f é $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ pois f é um polinômio com monômio dominante $\frac{x^5}{5}$.

(iii) $f'(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = x(x-1)(x^2 - x - 2)$ e

$$f'(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) \ .$$

As raízes de f' são, em ordem crescente, $\ -1\,,\ 0\,,\ 1\ $ e 2 .

Temos: $f' > 0$ em $(-\infty, -1)\,,\ f' < 0$ em $(-1, 0)\,,\ f' > 0$ em $(0, 1)\,,$
$f' < 0$ em $(1, 2)$ e $f' > 0$ em $(2, +\infty)$.

Assim: $f \nearrow$ em $(-\infty, -1)\,,\ f \searrow$ em $(-1, 0)\,, f \nearrow$ em$(0, 1)$
$f \searrow$ em$(1, 2)$ e $f \nearrow$ em $(2, +\infty)$.

Ainda,

$x = -1$ é ponto de máximo local, $x = 0$ é ponto de mínimo local,

$x = 1$ é ponto de máximo local, e $x = 2$é ponto de mínimo local .

(iv) $f''(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 = (x - \frac{1}{2})(4x^2 - 4x - 4) = 4(x - \frac{1}{2})(x^2 - x - 1)$ e

$$f''(x) = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \ .$$

As raízes de f'' são, em ordem crescente, $\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1}{2}\ $ e $\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Temos: $f'' < 0$ em $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\,,\ f'' > 0$ em $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})\,,$

$f'' < 0$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$ e $f'' > 0$ em $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)\,,$

Assim: $f \cap$ em $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\,,\ \ f \cup$ em $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})\,,\ \ f \cap$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\,,$

e $f \cup$ em $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

(v) $f(-1) = \frac{33}{30}$, $f(0) = 0$ e 0 é raíz dupla de f, $f(1) = \frac{11}{30}$ e
$f(2) = \frac{32}{5} - \frac{16}{2} - \frac{8}{3} + 4 = 6 + \frac{2}{5} - 8 - 2 - \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6-10}{15} = -\frac{4}{15}$.

(vi) Pontos de inflexão: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6. Determine a equação da reta r perpendicular à reta $3x + y = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

Resolução:

Pelas hipóteses o coeficiente angular da reta r é $m_r = \frac{1}{3}$.

Ainda, como r é tangente ao gráfico de f em algum ponto $(p, f(p))$ temos,

$$f'(p) = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad f'(p) = 2p - 3 \ ,$$

assim obtemos $2p - 3 = \frac{1}{3}$ e $p = \frac{5}{3}$. Logo,

$$r : y - f(\frac{5}{3}) = 3(x - \frac{5}{3})\,, \quad f(\frac{5}{3}) = \frac{25}{9} - 5 = -\frac{20}{9}$$

e portanto,

$$r : y + \frac{20}{9} = \frac{1}{3}(x - \frac{5}{3}) \quad \text{ou} \quad r : y = \frac{x}{3} - \frac{25}{9} \quad \text{ou} \quad r : 3x - 9y - 25 = 0 \ \blacksquare$$