1ª Prova de MAT143 - Cálculo para Ciências Biomédicas - FCFUSP
27 de abril - 1º semestre de 2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
NºUSP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens. Boa Sorte!

1. Resolva as inequações:

a) $-x^3 - x^2 + 2 < 0$

b) $|x-1| - |x+2| > x$

Resolução:

a) Temos,

$$-x^3-x^2+2 < 0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2 = (x-1)(x^2+2x+2) = (x-1)[(x+1)^2+1] > 0 \Leftrightarrow x > 1\ .$$

b) Temos,

$$f(x) = |x-1|-|x+2| = \begin{cases} -(x-1)-(-x-2) & = 3\,, \qquad \text{se } x \leq -2 \\ -(x-1)-(x+2) & = -2x-1\,, \quad \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ (x-1)-(x+2) & = -3\,, \qquad \text{se } x \geq 1\ . \end{cases}$$

Assim, se $(-\infty,-2)$ temos $f(x) = 3 > x$.

Se $x \in [-2,1]$, temos $f(x) = -2x-1 > x \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$.

Se $x \in [1,+\infty)$, não ocorre $f(x) = -3 > x$.

Resposta a (b): $x \in (-\infty,-2]\bigcup[-2,-\frac{1}{3}) \ = \ (-\infty,-\frac{1}{3})$ ■

2. Esboce as regiões no plano definidas pelas respectivas desigualdades:

a) $x \geq 1, y \leq 0, 2x - y - 4 \leq 0, 3x - y - 4 \leq 0, x + y - 7 \leq 0$

b) $x^2 + 4y + 6x + 8 < 0$.

3. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto $p = 27$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} \ , & \text{se} \quad x \neq 3 \\ L \ , & \text{se} \quad x = p = 27 \end{cases} \ .$$

.

Resolução:

Se $x \neq 27$ temos,

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{(\sqrt[3]{x})^3 - 3^3} = \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{(\sqrt[3]{x} - 3)[\ (\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9\ ]} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9} \ .$$

Logo,

$$\lim_{x \to 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 27} = \lim_{x \to 27} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9} = \frac{1}{9 + 9 + 9} = \frac{1}{27} \ .$$

Resposta: Basta definirmos $L = \frac{1}{27}$ para que f seja contínua em $p = 27$ ■

4. Calcule

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{2x+5}$.

Resolução:

(a) Se x é próximo a zero temos $1+\cos x \neq 0$ e assim,

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\ .$$

Pelo 1º LF temos, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e pela continuidade das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ temos $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{0}{2} = 0$.

Como o limite do produto é o produto dos limites (se estes existem) concluímos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0\ .$$

(b) Substituindo $y = x+4$ temos, pelo 2º LF e por propriedades dos limites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x+4}\right)^{2x+5} = \lim_{y\to+\infty}\left\{\ \left[\ \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\ \right]^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3}\right\} = e^2\cdot 1^{-3} = e^2 \quad \blacksquare$$

5. Compute os limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 6\text{sen}\, x + 1}{6x^3 + \cos x + 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$.

Resolução:

(a) Temos,

$$\frac{5x^3 - 6\text{sen}\, x + 1}{6x^3 + \cos x + 2} = \frac{5 - 6\frac{\text{sen}\, x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{6 + \frac{\cos x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} \quad ,$$

e, como $\left|\frac{\text{sen}\, x}{x^3}\right| \le \frac{1}{|x|^3}$ e $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \le \frac{1}{|x|^3}$ obtemos pelo Teor. do Confronto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\, x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

e concluímos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3 - 6\text{sen}\, x + 1}{6x^3 + \cos x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5 - 6\frac{\text{sen}\, x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{6 + \frac{\cos x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \frac{5}{6} \ .$$

(b) Temos,

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x(x+1)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{x+1}$$

e

$$\lim_{x\to-1^-} 2 + \frac{1}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-1^-} x + 1 = 0^+ \ .$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{2x+1}{x^2+x} = +\infty \quad \blacksquare$$

6. Esboce a cônica

$$4x^2 - 16x + 8y - y^2 - 4 = 0$$

e identifique seus elementos: eixos, semi-eixos, focos, centro, diretrizes e assíntotas.

Resolução:

Temos,

$$4x^2-16x+8y-y^2-4 = 4(x^2-4x)-(y^2-8y)-4 = 4[(x-2)^2-4]-[(y-4)^2-16]-4$$

$$= 4(x-2)^2 - 16 - (y-4)^2 + 16 - 4 = 4(x-2)^2 - (y-4)^2 - 4 \ .$$

Logo, a equação dada equivale a

$$(x-2)^2 - \frac{(y-4)^2}{2^2} = 1 \ .$$

Temos então a equação de uma hipérbole com:

(i) centro: $(2,4)$

(ii) vértices: $(1,4)$ e $(3,4)$

(iii) focos: $(2+\sqrt{5}\,,4)$ e $(2-\sqrt{5},4)$

(iv) assíntotas: as retas $y-4=2(x-2)$ e $y-4=-2(x-2)$

(v) eixo principal a reta $y=4$

(vi) eixo conjugado, ou imaginário, ou transverso: a reta $x=2$

(vii) excentricidade: $e=\sqrt{5}$ $\blacksquare$