Curso: MAT 143 - CÁLCULO para CIÊNCIAS BIOLÓGICAS - FCF
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Primeiro Semestre de 2010

LISTA 00 - Recordação

BOA SORTE !

1. **Relação Entre As Médias Aritmética, Harmônica e Geométrica** Na figura abaixo temos $|AC| = a$ e $|BC| = b$.

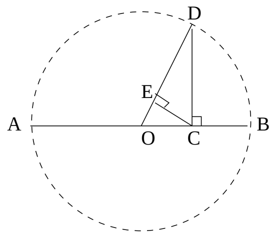

Figura 1: Médias aritmética - harmônica - geométrica

(i) Determine $|ED|$ em função de a e b.

(ii) Comprove na figura que a média aritmética de dois números a e b positivos é maior ou igual a sua média geométrica, a raíz quadrada do produto de a por b, que é maior ou igual a sua média harmônica, o inverso da média aritmética dos inversos de a e b :

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} .$$

Observação Dados a e b positivos, c $(a < c < b)$ é média harmônica de a e b se

$$(*) \qquad \frac{c-a}{b-c} = \frac{a}{b} .$$

Interpretando a, c e b como comprimentos de segmentos temos a figura abaixo.

Figura 2: Média Harmônica

De (*) temos $bc - ab = ab - ac$; logo, $c = \frac{2ab}{a+b}$ e portanto:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} .$$

2. **Interpretação Geométrica de um Determinante 2x2 :**

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Representemos dois vetores $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d\rangle$, não paralelos e em $\mathbb{R}^2$, canonicamente, com extremidades inicial $O = (0,0)$ e finais (a,b) e (c,d), respectivamente. Eles determinam um paralelogramo Ω e supomos-os, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a + b, c + d\rangle$ com extremidade inicial a origem. Temos a representação de Ω,

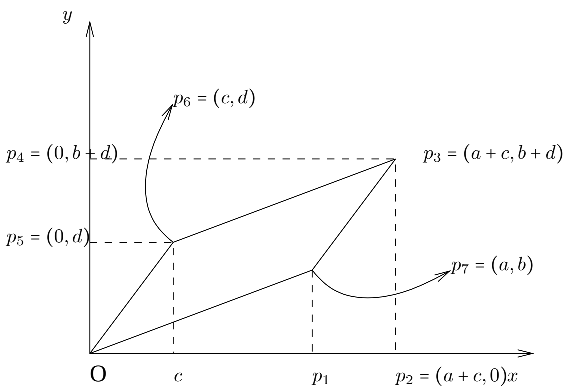

Figura 3: Determinante/Área

Considerendo os pontos P_i, $1 \leq i \leq 7$, calculemos a área delimitada por Ω.
Notação: $A(S)$ é a área delimitada pela curva S.

Temos,

$A(\Omega) = A(OP_2P_3P_4) - A(OP_1P_7) - A(P_1P_2P_3P_7) - A(P_3P_4P_5P_6) - A(P_5OP_6)$,
sendo que:

$A(OP_2P_3P_4) = (a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd$,

$A(OP_1P_7) = \frac{ab}{2}$,

$A(P_1P_2P_3P_7) = \frac{(b + b + d)c}{2} = bc + \frac{cd}{2}$,

$A(P_3P_4P_5P_6) = \frac{(c + a + c)b}{2} = bc + \frac{ab}{2}$ e

$A(P_5OP_6) = \frac{cd}{2}$.

Logo, temos

$A(\Omega) = ab + ad + bc + cd - \frac{ab}{2} - bc - \frac{cd}{2} - bc - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} = ad - bc.$

Associamos então o determinante a uma área.

A área é positiva e o determinante não necessariamente. Não há aí uma incongruência pois casos em que o determinante é negativo não corresponderão à figura esboçada. Verifique.

Observação: Se $\vec{u}$ corresponde à primeira coluna do determinante, $\vec{v}$ à segunda, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos, e o **menor ângulo** da extremidade final de $\vec{u}$ à extremidade final de $\vec{v}$ estiver orientado no sentido anti-horário então,

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0 \ .$$

Caso contrário, se a orientação é no sentido horário, temos $ad - bc < 0$.

Verificação Medimos ângulos em $\mathbb{R}^2$ no sentido anti-horário e a partir do eixo Ox.

Se α é o ângulo de Ox a $\vec{u}$ e β o ângulo de Ox a $\vec{v}$ temos, $\tan\alpha = \frac{b}{a}$ e $\tan\beta = \tan\frac{d}{c}$.

Caso 1: $\vec{u}$ no primeiro quadrante.

(1a) Para $\vec{v}$ no primeiro quadrante temos (vide figura anterior),

$$0 < \tan\alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan\beta \ , \quad bc < ad \ , \quad ad - bc > 0 \ ,$$

onde na segunda implicação utilizamos $ac > 0$.

(1b) Para $\vec{v}$ no segundo quadrante temos $c < 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e,

$$\tan\beta = \frac{d}{c} < 0 < \frac{b}{a} = \tan\alpha \ , \quad ad > bc \ .$$

(1c) Para $\vec{v}$ no terceiro quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c < 0$, $d < 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (esboce),

$$0 < \tan\beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan\alpha \ , \quad ad > bc \ .$$

Caso 2: $\vec{u}$ no segundo quadrante logo, $a < 0$ e $b > 0$.

(2a) Para $\vec{v}$ no segundo quadrante temos, $c < 0$, $d > 0$, $ac > 0$ e (esboce),

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan\beta < 0 \ , \quad bc < ad \ .$$

(2b) Para $\vec{v}$ no terceiro quadrante então $c < 0$, $d < 0$, $ac > 0$ e,

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} < 0 < \frac{d}{c} = \tan\beta \ , \quad bc < ad \ .$$

(2c) Para $\vec{v}$ no quarto quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c > 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (esboce),

$$\tan\beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan\alpha < 0 \ , \quad ad > bc \ .$$

Casos 3 e 4: Para $\vec{u}$ no terceiro quadrante, os sub-casos com $\vec{v}$ no 3 , 4 e 1 quadrantes são análogos a (1a), (1b) e (1c), respectivamente. Para $\vec{u}$ no 4 quadrante os sub-casos com $\vec{v}$ no 4 , 1 e 2 quadrantes são análogos a (2a), (2b) e (2c), respectivamente ■

Verifique: Nas doze possibilidades acima o determinante é igual à área do paralalogramo determinado pelos vetores cujas coordenadas são as colunas.

Obs Se o ângulo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ é maior que π, o de $\vec{v}$ a $\vec{u}$ é menor que π e o determinante cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas de $\vec{v}$ e a segunda pelas de $\vec{u}$ é positivo e, portanto, trocando as colunas o determinante obtido é negativo.

Exercício 1 Para $z_j = x_j + iy_j = e^{i\theta_j}|z_j|$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ temos,

$$z_2\overline{z_1} \;=\; (x_1x_2 + y_1y_2) \;+\; i\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2|cos(\theta_2 - \theta_1) \;+\; i|z_1||z_2|sen(\theta_2 - \theta_1)\ .$$

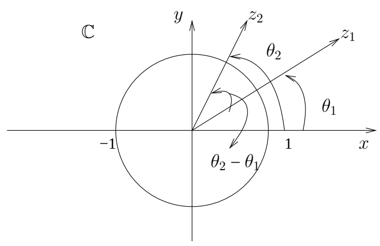

Figura 4: Ângulo entre dois números em $\mathbb{C}$

Consequência Com as mesmas hipóteses e notação acima,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2|sen(\theta_2 - \theta_1)\ .$$

O **ângulo entre os segmentos** $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é o menor ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, unindo B e C.

Exercício 2 A área de um paralelogramo tal que θ é o ângulo entre dois lados não paralelos e de comprimentos l_1 e l_2 é: $\mathbf{l_1 l_2 sen}\,\theta$. Notemos que $0 < \theta < \pi$. Vide figura. O

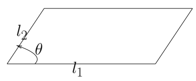

Figura 5: Área de um Paralelogramo

ângulo entre $\vec{u}$ **e** $\vec{v}$ é, fixadas representações de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com mesmo ponto inicial, o menor ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, unindo suas extremidades finais.

Se $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ temos $\theta_2 - \theta_1 = \theta$, $sen(\theta_2 - \theta_1) = sen\theta$ e o determinante é a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Se $\pi < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ então $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi - \theta$, $sen(\theta_2 - \theta_1) = -sen\,\theta$ e o determinante é o oposto da área do paralelogramo ∎

Exercício 3 Prove $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2Re\,(z_2\overline{z_1}) + |z_2|^2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Obs: Sendo θ o ângulo entre os segmentos que representam usualmente os números complexos $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, no plano de Argand-Gauss temos, pela **lei dos cossenos**,

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2|\cos\theta\ .$$

Pelo exercício 2, $|z_1||z_2|\cos\theta = |z_1||z_2|\cos(\theta_2 - \theta_1)$. Notemos que $\cos\theta = \cos(\theta_2 - \theta_1)$.