

**CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS:  
CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO,  
CONCAVIDADES E PONTOS DE INFLEXÃO,  
ASSÍNTOTAS E  
CONDIÇÕES PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS**

**Definições:** Seja  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A$  um subconjunto não vazio do domínio de  $f$ .

- $f$  é **estritamente crescente** em  $A$  se  $\forall s, t \in A$  temos  $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$ .
- $f$  é **estritamente decrescente** em  $A$  se  $\forall s, t \in A$  temos  $s < t \Rightarrow f(s) > f(t)$
- $f$  é **crescente** em  $A$  se  $\forall s, t \in A$  temos  $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$
- $f$  é **decrescente** em  $A$  se  $\forall s, t \in A$  temos  $s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$ .

**Observação:** Na definição acima, se  $A = \text{Dom}(f)$  dizemos apenas que  $f$  é, respectivamente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente ou crescente ou decrescente.

**Teorema 1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e, derivável em  $(a, b)$ .

- (i) Se  $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ , então  $f$  é estritamente crescente.
- (ii) Se  $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ , então  $f$  é estritamente decrescente.

**Prova:**

- (i) Dados  $s, t \in [a, b]$ , com  $s > t$ , pelo TVM existe  $c \in (t, s)$  tal que

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(c) > 0 \implies f(s) - f(t) > 0 \implies f(s) > f(t) .$$

- (ii) Basta aplicar o item (i) à função  $-f$  ■

Se a função  $f$  é derivável em  $p$ , a equação da **reta tangente** em  $(p, f(p))$  ao gráfico de  $f$  é:

$$T : y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad T : y = f(p) + f'(p)(x - p) \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Abusando a notação a reta tangente  $T$  em  $(p, f(p))$  é o gráfico da **função afim**  $T$ ,

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

**Observação:** Mudando a notação,  $P_1(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$  é um polinômio de grau 1 (um) na variável real  $x$ , denominado **polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  no ponto  $p$** .

**Definição.** Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem **concauidade para cima** no intervalo aberto  $I$  se

$$f(x) > T(x),$$

qualquer que seja a reta tangente  $T$  em  $(p, f(p))$ , com  $p \in I$ , e  $x \in I$ ,  $x \neq p$ .

**Definição.** Dizemos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem **concauidade para baixo** no intervalo aberto  $I$  se

$$f(x) < T(x),$$

qualquer que seja a reta tangente  $T$  em  $(p, f(p))$ , com  $p \in I$ , e  $x \in I$ ,  $x \neq p$ .

**Definição.** Dada  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $p$ ,  $p$  é **ponto de inflexão** de  $f$  se existir um intervalo  $(a, b) \subset \text{Dom}(f)$  tal que  $f$  tem concauidades de nomes contrários em  $(a, p)$  e em  $(p, b)$ .

**Definição.** Seja  $p$  um ponto de inflexão de  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Se  $f'(p) = 0$ , então  $p$  é **ponto de inflexão horizontal** de  $f$ .
- Se  $f'(p) \neq 0$ , então  $p$  é **ponto de inflexão oblíquo** de  $f$ .

**Teorema 2.** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável.

- Se  $f''(x) > 0$  em  $(a, b)$  então  $f$  tem a concauidade para cima em  $(a, b)$ .
- Se  $f''(x) < 0$  em  $(a, b)$  então  $f$  tem a concauidade para baixo em  $(a, b)$ .

**Prova:**

- Seja  $p \in (a, b)$  e consideremos  $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ ,  $x \in (a, b)$  e a diferença,

$$\varphi(x) = f(x) - T(x), x \in (a, b) .$$

Como  $\varphi'' = f'' > 0$  então  $\varphi'$  é crescente, sendo que  $\varphi'(p) = f'(p) - f'(p) = 0$ . Desta forma temos,  $\varphi'(x) > 0$  se  $x > p$  e  $\varphi'(x) < 0$  se  $x < p$  e portanto

$$\varphi \text{ é estrita/e crescente em } [p, b) \text{ e estrita/e decrescente em } (a, p] \text{ e } \varphi(p) = 0.$$

Consequentemente,

$$x > p \implies \varphi(x) > \varphi(p) = 0 \text{ e } x < p \implies \varphi(x) > \varphi(p) = 0 .$$

Logo, se  $x \neq p$  temos  $\varphi(x) = f(x) - T(x) > 0$  e assim,  $f(x) > T(x)$ .

- Basta trocar  $f$  por  $-f$  e aplicar o item (i) ■

### Uma interpretação para o Teorema 2.

Suponhamos que a variável é temporal. Se  $f'' > 0$  sobre  $(a, b)$ , as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de  $f$  são tais que suas inclinações (coeficientes angulares) aumentam com o transcorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se  $f'' < 0$  ■

**Definição.**  $C^2((a, b)) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f, f' \text{ e } f'' \text{ são contínuas}\}.$

### Proposição 1. (Uma condição necessária para que um ponto seja de inflexão):

Se  $f \in C^2((a, b))$  e  $p$  é ponto de inflexão de  $f$  então  $f''(p) = 0$ .

#### Prova:

Se  $f''(p) \neq 0$  devido à continuidade de  $f''$  existe um subintervalo  $(c, d)$  contido em  $(a, b)$  e contendo  $p$  tal que  $f''(x) > 0$  para  $x \in (c, d)$  e portanto  $p$  não é ponto de inflexão ✗

**Exemplo 1.** A função  $f(x) = x^3$  tem em  $p = 0$  um ponto de inflexão horizontal (verifique).

**Exemplo 2.** A derivada segunda em um ponto  $p$  nula,  $f''(p) = 0$ , não garante que o ponto seja de inflexão, como mostra o caso da função  $f \equiv 1$  e das funções  $f(x) = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , em  $p = 0$ .

**Exemplo 3.** A hipótese  $f''$  contínua é necessária na Proposição 1, como mostra a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Pois, verifique,  $p = 0$  é ponto de inflexão de  $f$  mas não existe  $f''(0)$  (sendo  $f'(0) = 0$ ) ■

**Definição.** Seja  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . A reta  $y = mx + n$  é uma **assíntota** para  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Se  $m = 0$  temos uma **assíntota horizontal** e se  $m \neq 0$  temos uma **assíntota oblíqua**.

**Observação:** Valem definições análogas para  $x \rightarrow -\infty$ .

**Observações.** Se  $f$  é uma função racional,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p \text{ e } q \text{ polinômios, } m \text{ o grau de } p \text{ e } n \text{ o grau de } q,$$

consideremos a diferença  $m - n$ , o grau de  $p$  menos o grau de  $q$ . Temos,

- Se  $m - n \leq 1$  então  $f$  admite assíntota.
- Se  $m - n = 0$  ou  $m - n = 1$ , basta dividir os polinômios para determinar a assíntota.
- Se  $m - n < 0$  (grau de  $q$  maior que grau de  $p$ ),  $y = 0$  (o eixo  $Ox$ ) é uma assíntota.

**Condição necessária para a existência da assíntota:** Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m .$$

Assim, se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \notin \mathbb{R}$   $f$  não tem assíntota para  $x \rightarrow +\infty$ .

**Um método para determinar a existência de uma assíntota de  $f$  para  $x \rightarrow +\infty$ :**

Verificada a condição de existência acima computamos o limite,

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] .$$

Se tal limite é um número real, vemos facilmente que  $y = mx + n$  é uma tal assíntota de  $f$ .

**Definições.** Sejam  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $A \subset \text{Dom}(f)$  e  $p \in A$ .

- $f(p)$  é o **valor máximo** de  $f$  em  $A$ , ou  $p$  é um **ponto de máximo** de  $f$  em  $A$  se

$$f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in A .$$

- $f(p)$  é o **valor mínimo** de  $f$  em  $A$ , ou  $p$  é um **ponto de mínimo** de  $f$  em  $A$  se

$$f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in A .$$

- $f(p)$  é o **valor máximo global** de  $f$ , ou  $p$  é um **ponto de máximo global** de  $f$ , se para todo  $x \in \text{Dom}(f)$ ,  $f(p) \geq f(x)$ .

- $f(p)$  é o **valor mínimo global** de  $f$ , ou  $p$  é um **ponto de mínimo global** de  $f$ , se para todo  $x \in \text{Dom}(f)$ ,  $f(p) \leq f(x)$ .

- $p$  é **ponto de máximo local** de  $f$  se existir  $r > 0$  tal que

$$f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in (p - r, p + r) \cap \text{Dom}(f) .$$

- $p$  é **ponto de mínimo local** de  $f$  se existir  $r > 0$  tal que

$$f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in (p - r, p + r) \cap \text{Dom}(f) .$$

- os pontos de máximo e mínimo, globais e locais, de uma função são ditos **extremantes globais** e **extremantes locais**, respectivamente.

- se  $f'(p) = 0$ ,  $p$  é um **ponto crítico** ou **ponto estacionário**.

- Os valores máximo e mínimo globais são também chamados **máximo e mínimo absolutos** e os pontos de máximo e mínimo globais são também chamados de **pontos de máximo e mínimo absolutos**.

- Os valores de máximo e mínimo de  $f$  em  $A$  são também ditos **valores de máximo e mínimo de  $f$  relativos/restritos a  $A$**  e os pontos de máximo e mínimo de  $f$  em  $A$  são também ditos **pontos de máximo e mínimo de  $f$  relativos/restritos a  $A$** .

**Teorema 3 (Condição Necessária para Máximos e Mínimos).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e derivável em  $(a, b)$ . Se  $x_0 \in (a, b)$  é ponto de máximo ou mínimo, local, de  $f$  então  $f'(x_0) = 0$ .

**Prova:**

Trocando  $f$  por  $-f$  se necessário, podemos supor  $x_0$  um ponto de mínimo local. Assim, se  $h \neq 0$  é suficientemente pequeno tal que  $x_0 + h \in (a, b)$  temos  $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$  e

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \text{ se } h > 0, \text{ e } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \text{ se } h < 0.$$

Logo, como  $\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  temos  $f'(x_0) \geq 0$  e  $f'(x_0) \leq 0$  e então  $f'(x_0) = 0$  ■

**Teorema 4. (Condição Suficiente para Máximo e Mínimo Locais).** Seja  $f \in C^2((a, b))$  e  $p \in (a, b)$  um ponto crítico de  $f$ . Então,

- (i)  $f'(p) = 0$  e  $f''(p) > 0 \implies p$  é um ponto de mínimo local.
- (ii)  $f'(p) = 0$  e  $f''(p) < 0 \implies p$  é um ponto de máximo local.

**Prova:**

- (i) Devido à continuidade de  $f''$  existe um intervalo  $(c, d)$  contendo  $p$  no qual  $f'' > 0$ . Então, no intervalo  $(c, d)$ ,  $f'$  é crescente sendo que  $f'(p) = 0$ . Logo, no intervalo  $(c, p)$  temos  $f' < 0$  e  $f$  estritamente decrescente em  $(c, p]$  e no intervalo  $(p, c)$  temos  $f' > 0$  e  $f$  estritamente crescente. Portanto,  $f(p)$  é ponto de mínimo no intervalo  $(c, d)$

- (ii) Basta aplicar o item (i) à função  $-f$  ■