MAT 143 - Cálculo para Biociências - FCFUSP

1º semestre de 2015

INTEGRAL EM $\mathbb{R}$

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0,T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < ... < t_i < ... < t_n = T$, a variação no período $[0,T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \qquad Q(T)-Q(0) = \sum_{i=1}^{n}[Q(t_i)-Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}.$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ é a vazão num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ obtemos

$$(2) \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}-t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}).$$

Combinando (1) e (2) encontramos,

$$(3) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i}) \Delta t_i.$$

Definimos então **a integral de** Q' [que notamos $\int_0^T Q'(t)dt$] como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i)\Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] \ ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se Q' é continua, temos,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \clubsuit$$

Interpretação. A variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado.

Notando que Q é uma primitiva de Q' e trocando Q' por f é fácil ver que podemos reenunciar o resultado acima como: dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e F uma primitiva de f temos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do 1º Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integrável e* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivável e tal que* $F' = f$*. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

Prova.

Por definição de integral, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,,$$

onde

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \text{ é uma } \textbf{partição} \text{ de } [a,b],$$

$$|\mathcal{P}| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\} \text{ é a } \textbf{norma} \text{ da partição } \mathcal{P},$$

$$\mathcal{E} = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ e

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,,$$

é a **soma de Riemann** relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

A seguir, seja

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + [F(x_n) - F(x_{n-1})].$$

Pelo TVM para derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i.$$

Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemmann de f relativa a esta partição $\mathcal{P}$ e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ é

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Assim, para toda partição $\mathcal{P}$ existe uma escolha $\mathcal{E}$ tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$.

Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido

$$F(b) - F(a)\,\clubsuit$$

Assumiremos neste texto o seguinte resultado,

Teorema. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável.*

Prova. Vide `http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT143-FCF-SUPREMO-2015.pdf`

Passamos então a provar o intuitivo e importante teorema abaixo

Teorema. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f \geq 0$ e $f(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in [a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Prova.

Suporemos $x_0 \in (a,b)$ pois a prova é semelhante nos casos $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

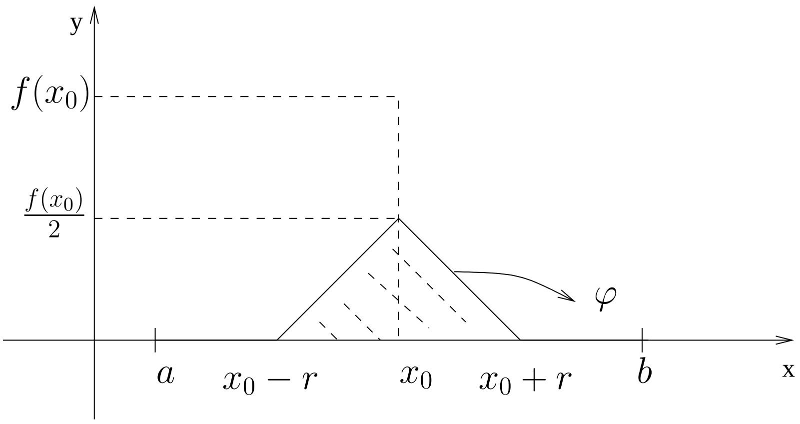

Figura 1: A integral de φ, com $f \geq \varphi \geq 0$.

Por continuidade, existe um intervalo $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$ tal que

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \ \in [x_0 - r\,, x_0 + r].$$

Então, a função $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (vide figura acima) definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, \text{ se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} \text{ e} \\ \text{linear sobre os segmentos } [x_0 - r, x_0] \text{ e } [x_0 + r, b], \end{cases}$$

é contínua e satisfaz $f(x) \geq \varphi(x)$ para todo $\in [a,b]$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \\ &= \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \varphi(x)\,dx \\ &= \frac{f(x_0)r}{2} > 0 \clubsuit \end{aligned}$$

Primeiro TVM para Integrais. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *contínua. Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a).$$

Prova. Vide figura abaixo.

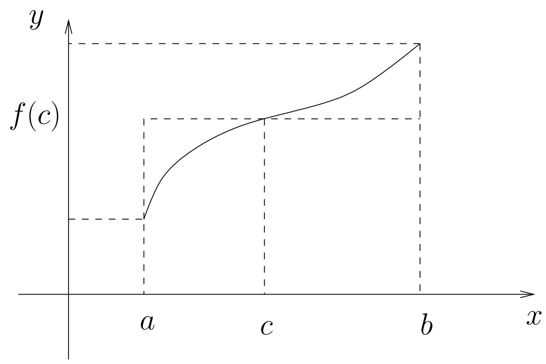

Figura 2: Ilustração para o Primeiro TVM para Integrais.

Se f é constante é óbvio que em qualquer c em (a, b) a igualdade afirmada é satisfeita.

Se f não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então obtemos $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Pelo teorema do valor intermediário segue que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $m < f(x_0) < M$. Pela continuidade de f encontramos

$$\int_a^b [f(x) - m]\,dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b [M - f(x)]\,dx > 0.$$

Logo,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx \quad \text{e} \quad m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \clubsuit$$

Passamos então a provar o segundo teorema fundamental do cálculo.

Segundo Teorema Fundamental do Cálculo. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, está bem definida a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

e ainda, F é uma primitiva de f. Isto é, F é derivável e

$$F'(x) = f(x),\ \text{para todo } x \in [a,b].$$

Prova.

Propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais mostram

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{f(c)h}{h} = f(c)$$

para algum $c = c(h)$ entre x e $x+h$. Se $h \to 0$, então $c \to x$ e devido à continuidade de f segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(\,c(h)\,\big) = f(x)\,,$$

o que prova que F é derivável e que $F' = f$ ♣

Segundo TVM para Integrais. *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, com f e g contínuas e, ainda, $g \geq 0$ e*

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0.$$

Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$(**) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Prova.

Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então, $\forall x \in [a,b]$ temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

- $\diamond$ Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo teorema do valor intermediário existe c no intervalo aberto de extremidades x_1 e x_2 tal que $f(c) = \gamma$.

- $\diamond$ Caso 2. Se $\gamma = M$ então

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\, dx = 0.$$

Logo, evido à desigualdade $[M - f(x)]g(x) \geq 0$, temos $[M - f(x)]g(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto, como g não se anula em algum intervalo aberto J, segue que f é então constante e igual a M em J e assim, todo ponto c em J satisfaz (**).

- $\diamond$ Caso 3. Se $\gamma = m$, basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e g ♣

Interpretação. Dada um função f contínua, então f assume a sua média ponderada pela função $g \geq 0$ se satisfeita a hipótese

$$\int_a^b g(t)\, dt > 0.$$

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida). *Sejam f e g deriváveis em (a, b). Então, $f'g$ admite primitiva em (a, b) se e só se fg' também admite e, neste caso,*

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx.$$

Prova.

Pela fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ temos

$$fg' = (fg)' - f'g\,,$$

donde concluímos que ψ é uma primitiva de $f'g$ se e somente se $fg - \psi$ é uma primitiva de fg'. Isto é, $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg - \psi)' = fg'$ ♣

Notação. Lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida). *Sejam f e g funções com derivadas contínuas em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Prova.

Pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b .$$

Da fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ a da linearidade da integral definida segue que

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Eliminando

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx$$

das duas equações acima obtidas concluímos a prova♣

Proposição (Mudança de Variável na Integral Indefinida). *Seja I um intervalo e consideremos a função $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Suponhamos que a função $\varphi : y \in J \mapsto x = \varphi(y) \in I$, onde J é um intervalo, é inversível e derivável com inversa $\varphi^{-1} : x \in I \mapsto y = \varphi^{-1}(x) \in J$ também derivável. Se*

$$\int f\big(\varphi(y)\big)\,\varphi'(y)\,dy = F(y) + k, \text{ onde } y \in J \text{ e } k \text{ é fixo em } \mathbb{R},$$

então temos

$$\int f(x)\,dx = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + k.$$

Prova.

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre F e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$(F \circ \varphi^{-1})'(x) = F'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$$

$$= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot 1 = f(x)♣$$

Teorema da Mudança de Variável. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua,* I *um intervalo e* a *e* b *arbitrários em* I *. Seja* $\varphi : [c,d] \to I$ *tal que* φ' *é contínua e* $\varphi(c) = a$ *e* $\varphi(d) = b$*. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy.$$

Atenção. *Não é necessário* $a < b$*.*

Prova.

Como f, φ e φ' são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua f admite uma primitiva F e então, pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y).$$

Então, aplicando novamente o primeiro TFC obtemos

$$\begin{aligned}\int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy &= (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\,dx \clubsuit\end{aligned}$$