MAT 143 - Cálculo I para Ciências Biológicas - FCFUSP

Semestre 1 de 2015

TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS, DE ROLLE, DO VALOR MÉDIO (TVM), DARBOUX, TVM GENERALIZADO (CAUCHY) E REGRAS DE L'HOSPITAL

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Nesta seção apresentamos sete teoremas, provando os cinco relativos à derivação e apenas enunciando os dois (logo abaixo) relativos a continuidade. Indicamos o intervalo aberto de extremidades a e b por (a,b).

Teorema do Valor Intermediário (TVI, Bolzano). *Seja* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *uma função contínua. Então, a imagem de* f*, denotapor e definida por*

$$Im(f)=f((a,b))=\{f(x):x\in(a,b)\},$$

é um intervalo. Isto é, dado um número y *satisfazendo* $f(x_1)<y<f(x_2)$*, com* x_1 *e* x_2 *ambos em* (a,b)*, então existe* x *em* (a,b) *tal que* $f(x)=y$*.*

Prova.

Vide *Fundamentos* disponível na página destinada ao curso ♣

Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *contínua. Então,* f *assume máximo* (M) *e mínimo* (m) *em* $[a,b]$*. Isto é, existem* x_1 *e* x_2*, ambos em* $[a,b]$*, tais que*

$$m=f(x_1)\leq\ f(x)\ \leq f(x_2)=M,\ \textit{para todo}\ \ x\in[a,b].$$

Prova.

Vide *Fundamentos* disponível na página destinada ao curso ♣

A seguir, utilizamos os resultados acima.

Condição Necessária para Máximos e Mínimos. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b). *Seja* p *um ponto de máximo local ou de mínimo local de* f. *Então,*

$$f'(p) = 0.$$

Prova. Notemos que $p \in (a, b)$.

Temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = f'(p).$$

Se p é ponto de máximo local, o primeiro limite é maior ou igual a zero e o segundo é menor ou igual a zero. Como eles coincidem, temos $f'(p) = 0$.

Se p é ponto de mínimo local, analisando $-f$ recaímos no caso acima♣

Teorema de Rolle. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua, derivável em* (a, b) *e tal que* $f(a) = f(b)$. *Então, existe* p *em* (a, b) *tal que*

$$f'(p) = 0.$$

Prova.

Se f é constante, o resultado é óbvio.

Caso contrário, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass f assume um mínimo $m = f(x_1)$ e um máximo $M = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in [a, b]$ e $m \neq M$. Logo, como $f(a) = f(b)$, concluímos que ou $x_1 \in (a, b)$ ou $x_2 \in (a, b)$.

Isto é, ou x_1 é um ponto de mínimo local e $f'(x_1) = 0$ ou x_2 é um ponto de máximo local e $f'(x_2) = 0$ ♣

Teorema do Valor Médio (TVM). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). Então, existe p no intervalo aberto (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(p).$$

Prova.

A equação da reta secante ao gráfico de f pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$S(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a), \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

A seguir, definimos a função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b),

$$\varphi(t) = f(t) - S(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

É claro que $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$ e então, pelo Teorema de Rolle aplicado à função φ, existe $p \in (a, b)$ tal que

$$0 = \varphi'(p) = f'(p) - S'(p) = f'(p) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \clubsuit$$

Interpretação física do Teorema do Valor Médio. Suponhamos que uma partícula move-se sobre uma reta e que $s(t)$, onde

$$s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R},$$

indica a distância em metros desta partícula em relação à origem adotada na reta, no instante t medido em segundos. Então, o Teorema do Valor Médio expressa que em algum instante $t_0 \in [t_1, t_2]$ a velocidade instantânea $v(t_0) = s'(t_0)$ é igual à velocidade média $v_{\text{média}}$ no período $[t_1, t_2]$. Isto é, temos

$$s'(t_0) = v(t_0) = v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \clubsuit$$

Propriedade do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável em $[a, b]$. Então, a imagem de f' é um intervalo.*

Prova.

Consideremos um número λ tal que

$$f'(c) < \lambda < f'(d), \text{ com } c \text{ e } d \text{ em } [a, b].$$

Mostremos que existe p em (c, d) tal que $f'(p) = \lambda$. Analisemos dois casos.

- ◇ O caso $\lambda = 0$. Então temos $f'(c) < 0$ e $f'(d) > 0$.

  Para x em um pequeno intervalo $(c, c + \epsilon)$ [com $\epsilon > 0$] temos

  $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

  e portanto $f(x) < f(c)$.

  Para x em um pequeno intervalo $(d - \delta, d)$ [com $\delta > 0$] temos

  $$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} > 0$$

  e portanto $f(x) < f(d)$. Desta forma, o ponto de mínimo $x = p$ da função $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ (com existência garantida pelo Teorema de Weierstrass) pertence ao intervalo aberto (c, d). Temos assim, $f'(p) = 0 = \lambda$.

- ◇ O caso geral. Basta vermos que $g(x) = f(x) - \lambda x$ satisfaz $g'(c) < 0 < g'(d)$♣

Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis em (a, b), com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $p \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

Prova.

Inicialmente notemos que $g(b) - g(a) \neq 0$ pois caso contrário, pelo Teorema de Rolle existiria $x_0 \in (a, b)$ tal que $g'(x_0) = 0$, contra a hipótese.

Consideremos a função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b),

$$\varphi(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

Temos, é claro,

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \text{ e } \varphi(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

Logo, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Assim, pelo TVM existe p em (a, b) tal que

$$0 = \varphi'(p) = [f(b) - f(a)]g'(p) - [g(b) - g(a)]f'(p).$$

Donde finalmente segue $[f(b) - f(a)]g'(p) = [g(b) - g(a)]f'(p)$♣

Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio Generalizado. Esboçando no plano a curva $\gamma(t) = (g(t), f(t))$, onde $t \in [a, b]$, e a reta S pelos pontos $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ vemos que existe uma reta T tangente à curva γ, em algum ponto $\gamma(p)$, e também paralela à reta S. Isto é, se m_T e m_S são os coeficientes angulares de T e S temos,

$$m_T = m_S = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Note que geometricamente o vetor tangente à curva γ no ponto p é o vetor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\gamma}'(p) &= \lim_{t \to p} \frac{\gamma(t) - \gamma(p)}{t - p} = \lim_{t \to p} \left(\frac{f(t) - f(p)}{t - p}, \frac{g(t) - g(p)}{t - p} \right) \\ &= \left(\lim_{t \to p} \frac{f(t) - f(p)}{t - p}, \lim_{t \to p} \frac{g(t) - g(p)}{t - p} \right) = (f'(p), g'(p)),\end{aligned}$$

interpretado fisicamente como o vetor velocidade da curva γ no “instante p”.

Ainda mais, o coeficiente angular m_T da reta T, paralela ao vetor $\gamma'(p)$, é a tangente do ângulo θ que o vetor forma com o eixo Ox (faça um esboço). Logo,

$$m_T = \tan\theta = \frac{f'(p)}{g'(p)} \clubsuit$$

REGRAS DE L'HOSPITAL

Tais regras aplicam-se à análise das indeterminações

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}\ .$$

Mostremos que são também indeterminações

$$\text{(i)}\ \ 0.\infty \qquad \text{(ii)}\ \ \infty - \infty \qquad \text{(iii)}\ \ 0^0 \qquad \text{(iv)}\ \ \infty^0 \quad \text{e} \quad \text{(v)}\ \ 1^\infty.$$

Prova. Temos,

(i) $\lim_{x\to 0} x\frac{13}{x} = 13.$

(ii) $\lim_{x\to +\infty} (x+15) - x = 15.$

(iii) $\lim_{x\to -\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$

(iv) $\lim_{x\to +\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$

(v) $\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{\ln \pi}{x})^x = e^{\ln \pi} = \pi$ ♣

Estas cinco indeterminações são redutíveis às indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
É trivial ver que $0.\infty$ é reduzido a

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Quanto aos casos (iii), (iv) e (v), temos

$$0^0 = e^{0\ln 0} = e^{0.(-\infty)} \ \ ; \ \ \infty^0 = e^{0\ln\infty} = e^{0\infty} \ \ ; \ \ 1^\infty = e^{\infty\ln 1} = e^{\infty.0}.$$

Peço ao leitor analisar o caso(ii).

Atenção. 0^∞ não é indeterminação pois

$$0^\infty = e^{\infty\ln 0} = e^{\infty.(-\infty)} = e^{\infty} \in \{0, +\infty\}.$$

Motivação às Regras de L'Hospital. Mostremos inicialmente uma versão simples e bem útil de tais regras. Suponhamos $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriváveis (logo, contínuas) e $p \in (a, b)$ satisfazendo

$$f(p) = g(p) = 0 \ \text{ e } \ g'(p) \neq 0.$$

Então, temos

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

Verificação.

É trivial ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\
&= \frac{f'(p)}{g'(p)} \clubsuit
\end{aligned}$$

Exemplos. Aplicando a regra acima (confira que podemos aplicá-la),

$$(1) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

$$(2) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1 \clubsuit$$

Primeira Regra de L'Hospital. Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo aberto (p, b), com $g'(x) \neq 0$ para todo x. Se

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to p^+} g(x) \ \text{ e existir } \ \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ \text{(finito ou infinito)},$$

então temos

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação. Vale uma regra similar nas seguintes quatro condições,

$$x \to p^- \qquad x \to p \qquad x \to +\infty \qquad e \qquad x \to -\infty.$$

Prova.

Definindo $f(p) = g(p) = 0$ obtemos f e g contínuas em $[p, b)$ e deriváveis no intervalo aberto (p, b). Assim, dado $x \in (p, b)$ e aplicando o TVM generalizado ao intervalo fechado $[p, x]$, consluímos que existe $x_1 \in (p, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} .$$

Desta forma, como $x_1 \to p^+$ se $x \to p^+$, concluímos que

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \to p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x \to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \clubsuit$$

Observação. A 1ª regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^-$" é trivialmente equivalente à 1ª regra de L'Hospital sob a condição "$x \to p^+$" pois

$$x \to p^+ \iff -x \to -p^- .$$

Segunda Regra de L'Hospital. Sejam f e g deriváveis no intervalo aberto (a, p), com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, p)$. Se

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to p^-} g(x) \quad \text{e existir} \quad \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{(finito ou infinito)},$$

então

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Observação. Vale uma regra similar nas quatro condições,

$$x \to p^+ \qquad x \to p \qquad x \to +\infty \qquad \text{e} \qquad x \to -\infty.$$

Prova.

Suponhamos

$$\lim_{x \to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \ \text{com } L \text{ um número real não nulo.}$$

Os casos $L = 0$ e $L = \infty$ são deixados ao leitor.

Como f e g tendem a $+\infty$ se $x \to p^-$, podemos supor $f > 0$ e $g > 0$.

Dado então $\epsilon > 0$, consideremos $\epsilon/2$. Por hipótese existe $\overline{a} \in (a,p)$ tal que

$$(1) \qquad c \in [\overline{a}\,,p) \Longrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} \in \Big(L - \frac{\epsilon}{2}\,, L + \frac{\epsilon}{2}\Big)\,.$$

Também podemos assumir x suficientemente próximo de p tal que

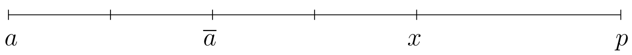
$$f(x) > f(\overline{a}) \ \text{ e } \ g(x) > g(\overline{a}).$$

Aplicando o TVM generalizado às funções f e g no intervalo $[\overline{a}, x]$, obtemos

$$(2) \qquad 0 < \frac{f(x) - f(\overline{a})}{g(x) - g(\overline{a})} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ \text{ para algum } \ c \in (\overline{a}, p)\ .$$

Observemos que

$$(3) \qquad \frac{f(x) - f(\overline{a})}{g(x) - g(\overline{a})} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}}{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}}\right).$$



Ainda mais [se $x \to p^-$, então $\overline{a}$ está fixo],

$$\lim_{x \to p^-} \frac{g(\overline{a})}{g(x)} = \lim_{x \to p^-} \frac{f(\overline{a})}{f(x)} = 0$$

e portanto existe $\overline{\overline{a}} \in (\overline{a}, p)$ tal que

$$(4) \qquad x \in (\overline{\overline{a}}\,, p) \ \ \Longrightarrow \ \ \frac{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}} \ \in \ \ (1 - \delta, 1 + \delta)\,,$$

com $\delta > 0$, pequeno, e a ser adequadamente escolhido . Utilizando (3), (1) e (4) [por (2) segue $L \geq 0$ e assim $L > 0$] supomos $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$L - \frac{\epsilon}{2} > 0$$

e obtemos a seguinte implicação

$$x \in (\overline{\overline{a}}\,, p) \ \Longrightarrow \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(\frac{1 - \frac{g(\overline{a})}{g(x)}}{1 - \frac{f(\overline{a})}{f(x)}}\right) \in \left(\Big(L - \frac{\epsilon}{2}\Big)\,(1 - \delta)\,,\, \Big(L + \frac{\epsilon}{2}\Big)\,(1 + \delta)\right).$$

Por fim, escolhemos $\delta > 0$ e pequeno o suficiente tal que (notemos o caso $\delta = 0$)

$$\left(\Big(L - \frac{\epsilon}{2}\Big)\,(1 - \delta)\,,\, \Big(L + \frac{\epsilon}{2}\Big)\,(1 + \delta)\right) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon) \qquad \left[\text{basta } 0 < \delta < \frac{\epsilon/2}{L + \epsilon/2}\right] \clubsuit$$