MAT143 - Cálculo para Ciências Biológicas

Semestre 1 de 2015

REGRA DA CADEIA, CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS, TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA E DUAS REGRAS DE L'HOSPITAL

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Regra da Cadeia (interpretação e demonstração).

Supondo $z = f(y)$ e $y = g(x)$ funções diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determinemos a derivada da função composta $z = (f \circ g)(x)$. Interpretando derivadas como limite de taxas de variação temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ ,$$

sendo que se Δx tende a zero então $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$ também tende a zero (pois g é contínua, já que g é derivável) e assim temos

$$\begin{cases} \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx (f\circ g)' \\ \frac{\Delta z}{\Delta y} \approx f' \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx g'\ . \end{cases}$$

Isto é, a taxa de variação da função composição $(f \circ g)$ é o produto das taxas de variação das funções f e g e, analogamente, a derivada $(f \circ g)'$ da composta é o produto das derivadas f' e g'.

A seguir, identifiquemos os pontos em que calculamos as derivadas. Consideremos $x = p$ e $y = g(p)$. Então, temos

$$\begin{aligned} (f\circ g)'(p) \quad &\approx \quad \frac{\Delta z}{\Delta x}(p) = \frac{(f\circ g)(p+\Delta x) - (f\circ g)(p)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(g(p+\Delta x)) - f(g(p))}{g(p+\Delta x) - g(p)}\ \frac{g(p+\Delta x)-g(p)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{g(p+\Delta x)-g(p)}{\Delta x} \quad &\approx \quad g'(p) \quad \text{e} \\ \frac{f(g(p+\Delta x)) - f(g(p))}{g(p+\Delta x) - g(p)} \quad &\approx \quad f'(g(p)). \end{aligned}$$

Esta última aproximação segue de

$$\frac{f(y) - f(g(p))}{y - g(p)} \approx f'(g(p)) \quad \text{se } y \approx g(p),$$

o que efetivamente ocorre pois como já vimos [a continuidade de g],

$$y = g(p + \Delta x) \text{ tende a } g(p) \text{ se } \Delta x \to 0.$$

Passando ao limite (para $\Delta x \to 0$) as aproximações acima, temos a identidade

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p).$$

Atenção. O cômputo é válido desde que $\Delta y = g(p + \Delta x) - g(p) \neq 0$, o que é verdade (para valores pequenos, não nulos, de $|\Delta x|$) se admitirmos $g'(p) \neq 0$. Temos então a regra da cadeia provada nos pontos em que g' é não nula.

A seguir, fazemos a demonstração completa.

Prova da Regra da Cadeia.

Por hipótese, $f = f(y)$ é derivável no ponto $g(p)$. Logo,

$$\lim_{y \to g(p)} \frac{f(y) - f(g(p))}{y - g(p)} = f'(g(p)).$$

Donde segue

$$\lim_{y \to g(p)} \left[\frac{f(y) - f(g(p)) - f'(g(p))(y - g(p))}{y - g(p)} \right] = 0.$$

Seja $E(y)$, com $y \neq g(p)$, o quociente no último limite. Temos

$$\begin{cases} f(y) - f(g(p)) - f'(g(p))[y - g(p)] = E(y)[y - g(p)], \\ \\ \text{com } E(g(p)) = 0 \ \text{ e } \ \lim\limits_{y \to g(p)} E(y) = 0. \end{cases}$$

Então, substituindo $y = g(p + h)$ e dividindo por h encontramos

$$\tfrac{f(g(p+h)) - f(g(p))}{h} = f'(g(p)) \tfrac{g(p+h) - g(p)}{h} + E(g(p+h)) \left[\tfrac{g(p+h) - g(p)}{h} \right].$$

Segue então triviamente que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(p+h)) - f(g(p))}{h} = f'(g(p))g'(p) + 0g'(0) = f'g(p))g'(p) \clubsuit$$

2. Elementos para esboço de gráficos e determinação de máximos e mínimos.

I - Seja $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ *é duas vezes diferenciável e* $J = (c,d) \subset (a,b)$.

(i) *Se* $f' > 0$ *sobre* J *então* f *é estritamente crescente sobre* J.

(ii) *se* $f' < 0$ *sobre* J *então* f *é estritamente decrescente sobre* J.

(iii) *se* $f'' > 0$ *sobre* J *então* f *tem concavidade voltada para cima sobre* J.

(iv) *se* $f'' < 0$ *sobre* J *então* f *tem concavidade voltada para baixo sobre* J.

II - Seja $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ *diferenciável. Seja* p *um ponto que é de máximo local ou de mínimo local ou um ponto de inflexão de* f *[um ponto de inflexão é definido como um ponto onde muda a concavidade].*

(v) *Se* p *um ponto é de máximo/mínimo local então* $f'(p) = 0$.

(vi) *Se* p *é um ponto de inflexão e* f'' *existe e é contínua, então* $f''(p) = 0$.

III - Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *derivável em* (a,b) *e contínua em* $[a,b]$. *Seja* p *um ponto de máximo ou de mínimo de* f. *Então,*

ou p *é um dos extremos do intervalo* $[a,b]$ *ou* $f'(p) = 0$.

IV - **Definição.** *Dada* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *a reta*

$$r : y = mx + n$$

é dita uma assíntota *para* f, *em* $+\infty$, *se*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Analogamente para assíntotas em $-\infty$ *e mesmo pra um ponto* $p \in \mathbb{R}$, *com* f *não derivável em* p *[podendo* p *pertencer ou não ao domínio de* f*].*

Provas e/ou Argumentos.

(I) (i) Se $f' > 0$ sobre J, dados x e y em J, com $x < y$, pelo TVM segue

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0, \text{ para algum } c \text{ entre } x \text{ e } y.$$

Logo,

$$f(y) > f(x).$$

(ii) Análogo ao caso (i).

(iii) Interpretação. Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre o subintervalo J, então as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de f, restrita a J, são tais que suas inclinações (coeficientes angulares) aumentam com o decorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima.

(iv) Interpretação. Análoga à interpretação de (iii).

(II) (v) Suponhamos que p um ponto em que f é derivável. Então,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = f'(p).$$

Se p é ponto de máximo local, o primeiro limite é maior ou igual a 0 e o outro é menor ou igual a 0. Como eles coincidem, segue $f'(p) = 0$.

Se p é ponto de mínimo local, analisando $-f$ recaímos no caso acima.

(vi) Supondo f'' contínua, a concavidade antes do ponto p voltada para baixo e após voltada para baixo, temos $f'' \leq 0$ antes de p e $f'' \geq 0$ depois de p. Logo, $f''(p) = 0$.

(III) Segue imediatamente de (II).

(IV) Nada há a provar ♣

3. TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Seja I um intervalo aberto e $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ contínua e inversível. Então,

(a) f é estritamente crescente ou f é estritamente decrescente.

(b) $J = f(I)$ é um intervalo aberto.

(c) $g = f^{-1} : J \to I$ é contínua.

(d) Se f é derivável em x, com $f'(x) \neq 0$, então g é derivável em $y = f(x)$ e

$$g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}.$$

Prova.

(a) Suponhamos $x_1 < x_2 < x_3$ satisfazendo $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) > f(x_3)$. Consideremos y tal que

$$\max\{(f(x_1), f(x_3)\} < y < f(x_2).$$

Pelo teorema do valor intermediário $y \in f\big((x_1, x_2)\big)$ e $y \in f\big((x_2, x_3)\big)$ ↯ A função $-f$ também é contínua e inversível e também não pode ocorrerem as condições $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_2) < f(x_3)$. Segue então que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

(b) Pelo teorema do valor intermediário, $J = f(I)$ é um intervalo. Por (a), f é estritamente crescente/decrescente. Logo, J não possui extremidades.

(c) Trocando f por $-f$, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que f é estritamente crescente. Consideremos então $y \in J$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $[g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon] \subset I$. Existem então y_1 e y_2 tais que $g(y_1) = g(y) - \epsilon$ e $g(y_2) = g(y) + \epsilon$. Logo, $g\big([y_1, y_2]\big) = [g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon]$.

(d) Dado $y_0 = f(x_0)$ e $y \neq y_0$, temos que $g(y) \to g(y_0) = x_0$ se $y \to y_0$. Então,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \clubsuit$$

4. Duas Regras de L'Hospital

Uma indeterminação ocorre quando no cômputo do limite de um quociente encontramos uma expressão do tipo

$$\frac{0}{0} \quad \text{ou} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

O caso abaixo é trivial e ilustrativo.

Sejam f e g deriváveis em p, tais que $f(p) = g(p) = 0$ e $g'(p) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

Prova.

Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} \\
&= \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\lim\limits_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} \\
&= \frac{f'(p)}{g'(p)} \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Para mais sobre a regra de L'Hospital, vide *Derivadas*, na página do curso.