MAT 1352 - Cálculo II - IFUSP
Segundo semestre de 2023
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Critérios de Convergência para Séries

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais tais que $a_n \geq 0$, para todo n.

- A série é convergente se e somente se a sequência das somas parciais
$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$
é limitada superiormente.

- **Critério da Integral.** Seja $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função positiva, contínua e decrescente. Então,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{ é convergente } \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \ \text{ é convergente.}$$
Atenção. O valor da série e o da integral podem ser diferentes.

- **Critério de Leibniz (para séries alternadas).** Suponhamos que (a_n) é uma sequência (real) decrescente a 0. Isto é, $a_n \searrow 0$. Então,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \ \text{ é convergente.}$$

Definições Básicas. Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série complexa.

- ◦ A série é absolutamente convergente se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.
- ◦ A série é condicionalmente convergente se
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \text{ converge } \quad \text{entretanto} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \ \text{ diverge.}$$
- ◦ Um rearranjo da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma reordenação dos termos $a_{n's}$ da série. Isto é, dada uma bijeção $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série
$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_{\sigma(j)} \ \text{ é um rearranjo (reordenação) da série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$
- ◦ A série é comutativamente convergente se todo rearranjo $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{\sigma(j)}$ converge.

Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ duas séries complexas e $c > 0$ uma constante.

- **Critério do termo geral.** Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, então $a_n \to 0$ se $n \to +\infty$.

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

- **Critério da comparação.** Suponhamos $|a_n| \leq c|b_n|$ para todo n. Então,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \text{ convergente} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ convergente.}$$

- **Critério da comparação no limite.** Suponhamos $b_n \neq 0$ para todo n e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = L \in [0, +\infty].$$

  (a) Se $L = 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ converge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

  (b) Se $0 < L < \infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge se e só se $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ converge.

  (c) Se $L = \infty$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|$ diverge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

- **Teste da raiz.** Suponhamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in [0, +\infty].$$

  (a) Se $r < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

  (b) Se $r > 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

  (c) Se $r = 1$, o teste é inconclusivo.

- **Teste da razão.** Suponhamos $a_n \neq 0$ para todo n e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \in [0, +\infty].$$

  (a) Se $r < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.

  (b) Se $r > 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge.

  (c) Se $r = 1$, o teste é inconclusivo.