$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT1352 - Cálculo II - IFUSP
16 de novembro de 2023

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ________________ GABARITO__________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Encontre a solução geral (e real) $y = y(t)$ da edol de ordem 3 dada por

$$y^{'''} - 2y^{''} + y^{'} - 2y = t^3 - 2t^2 + t - 2.$$

Solução.

Polinômio Característico. Este é

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1).$$

As raízes de $p = p(\lambda)$ são três, simples (multiplicidade um), e dadas por

$$\{2, i, -i\}.$$

Três soluções complexas (e linearmente independentes) são

$$\{e^{2t},\ e^{it} = \cos t + i \sin\, t,\ e^{-it} = \cos t - i \sin\, t\}.$$

Três soluções reais (e linearmente independentes) são

$$\{e^{2t},\ \cos t,\ \sin t\}.$$

Equação Homogênea. A solução geral (e real) da edo homogênea é

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t,$$

onde c_1, c_2 e c_3 são constantes reais arbitrárias.

VIDE PRÓXIMA PÁGINA.

Solução Particular. Existe uma solução particular da forma

$$y_p(t) = -\frac{t^3}{2} + at^2 + bt + c.$$

Donde segue

$$\begin{cases} y_p'(t) &= -\frac{3}{2}t^2 + 2at + b \\ \\ y_p''(t) &= -3t + 2a \\ \\ y_p'''(t) &= -3. \end{cases}$$

Substituindo na edolcc inicial

$$y^{'''} - 2y^{''} + y^{'} - 2y = t^3 - 2t^2 + t - 2$$

obtemos

$$-3-2(-3t+2a)+\left(-\frac{3}{2}t^2 + 2at + b\right)-2\left(-\frac{t^3}{2} + at^2 + bt + c\right) = t^3-2t^2+t-2.$$

Organizando o lado esquerdo segundo as potências de t obtemos

$$t^3 + \left(-\frac{3}{2} - 2a\right)t^2 + (6 + 2a - 2b)\,t + (-3 - 4a + b - 2c) = t^3 - 2t^2 + t - 2.$$

Cancelando t^3 encontramos

$$\left(-\frac{3}{2} - 2a\right)t^2 + (6 + 2a - 2b)\,t + (-3 - 4a + b - 2c) = -2t^2 + t - 2.$$

Donde segue o sistema

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} - 2a &= -2 \\ \\ 6 + 2a - 2b &= 1 \\ \\ -3 - 4a + b - 2c &= -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a &= 2 - \frac{3}{2} \\ \\ 2b &= 5 + 2a \\ \\ 2c &= -1 - 4a + b. \end{cases}$$

Donde seguem

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{11}{4}, \quad c = \frac{3}{8}.$$

Assim temos

$$y_p(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{11t}{4} + \frac{3}{8}.$$

Isto é,

$$y_p(t) = -\frac{1}{8}\left(4t^3 - 2t^2 - 22t - 3\right).$$

Resposta Final. A solução geral da edolcc inicial é

$$y_g(t) = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\sin t - \frac{1}{8}\left(4t^3 - 2t^2 - 22t - 3\right) \clubsuit$$

2. Encontre a solução geral (e real) $x = x(t)$ da edol de ordem 4 dada por

$$x^{''''} - 12x^{'''} + 54x^{''} - 108x^{'} + 81x = \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right) e^{3t}.$$

Solução.

Polinômio Característico. Este é

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 54\lambda^2 - 108\lambda + 81.$$

Temos

$$\begin{cases} p(3) &=& 3^4 - 4.3^4 + 6.3^4 - 4.3^3.3 + 3^4 = (1 - 4 + 6 - 4 + 1)3^4 = 0 \\ p(\lambda) &=& (\lambda - 3)(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27) \\ p(\lambda) &=& (\lambda - 3)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) \\ p(\lambda) &=& (\lambda - 3)^4. \end{cases}$$

Equação homogênea. A solução geral da edo homogênea associada é

$$x_h(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3t^2e^{3t} + c_4t^3e^{3t},$$

com c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes reais arbitrárias.

Solução Particular. Existe uma solução particular da forma

$$x_p(t) = Q(t)e^{3t},$$

com $Q = Q(t)$ satisfazendo

$$\frac{p''''(3)}{4!}Q'''' + \frac{p'''(3)}{3!}Q''' + \frac{p''(3)}{2!}Q'' + \frac{p'(3)}{1!}Q' + \frac{p(3)}{0!}Q \;=\; \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

Como $\lambda = 3$ é raiz de multiplicidade 4 do polinômio característico, temos

$$p(3) = p'(3) = p''(3) = p'''(3) = 0.$$

É fácil ver que

$$p''''(3) = 4.3.2.1 = 4!$$

Então, $Q = Q(t)$ satisfaz

$$Q'''' = \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

Podemos escolher

$$\begin{cases} Q''' &=& \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + t, \\ Q'' &=& \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}, \\ Q' &=& \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6}, \\ Q &=& \frac{t^6}{720} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24}. \end{cases}$$

Temos então a solução particular

$$x_p(t) = \left(\frac{t^6}{720} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24}\right) e^{3t}.$$

Solução geral (e real) da edol inicial. Esta é

$$x_g(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + c_3t^2e^{3t} + c_4t^3e^{3t} + \left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!}\right) e^{3t},$$

om c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes reais arbitrárias ♣

3. Encontre a solução geral (e real) $x = x(t)$ da edol de ordem 2 dada por

$$x'' - 8x' + 41x = te^{3t}\cos 5t.$$

Solução.

Polinômio Característico. Temos

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 41 = (\lambda - 4)^2 + 25 = (\lambda - 4)^2 - (5i)^2 = (\lambda - 4 + 5i)(\lambda - 4 - 5i).$$

Logo, as raízes características são

$$\lambda = 4 \pm 5i.$$

Equação Homogênea. A solução da edo homogênea associada é

$$x_h(t) = c_1 e^{4t}\cos 5t + c_2 e^{4t}\sin 5t,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
Equação Particular. Notando que

$$e^{3t}\cos 5t = \mathrm{Re}\left[e^{(3+5i)t}\right],$$

determinemos uma solução particular complexa $z = z(t)$ de

$$z'' - 8z' + 41z = te^{(3+5i)t}.$$

Procuremos uma solução particular complexa na forma

$$z(t) = Q(t)e^{(3+5i)t}.$$

Então, a função $Q = Q(t)$ satisfaz

$$\frac{p''(3+5i)}{2!}Q'' + \frac{p'(3+5i)}{1!}Q' + \frac{p(3+5i)}{0!}Q = t.$$

Notemos que

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(\lambda) & = & \lambda^2 - 8\lambda + 41, \\ p'(\lambda) & = & 2\lambda - 8, \\ p''(\lambda) & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{lcl} p(3+5i) & = & (9 + 30i - 25) - (24 + 40i) + 41 \\ & = & 1 - 10i, \\ p'(3+5i) & = & (6 + 10i) - 8 \\ & = & -2 + 10i, \\ p''(3+5i) & = & 2. \end{array}\right.$$

Assim, a função $Q = Q(t)$ satisfaz

$$\frac{2}{2!}Q'' + \frac{(-2+10i)}{1!}Q' + \frac{(1-10i)}{0!}Q = t.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA.

Isto é,

$$Q'' + (-2 + 10i)Q' + (1 - 10i)Q = t.$$

Escolhamos $Q = Q(t)$ na forma

$$Q(t) = \frac{t}{1 - 10i} + \alpha.$$

Notemos que $Q' = (1 - 10i)^{-1}$ e que $Q'' = 0$. Substituindo tais valores na equação

$$Q'' + (-2 + 10i)Q' + (1 - 10i)Q = t$$

obtemos

$$0 + (-2 + 10i)\frac{1}{1 - 10i} + (1 - 10i)\left[\frac{t}{1 - 10i} + \alpha\right] = t.$$

Orgaizando segundo as potências de t obtemos

$$t + \left[\frac{-2 + 10i}{1 - 10i} + (1 - 10i)\alpha\right] = t.$$

Cancelando t encontramos

$$(1 - 10i)\alpha = \frac{2 - 10i}{1 - 10i}.$$

Note se que

$$\frac{2 - 10i}{1 - 10i} = \frac{(2 - 10i)(1 + 10i)}{(1 - 10i)(1 + 10i)} = \frac{102 + 10i}{1 + 100} = \frac{102 + 10i}{101}.$$

Donde segue

$$\alpha = \frac{1}{101}\left(\frac{102 + 10i}{1 - 10i}\right) = \frac{1}{101}\left[\frac{(102 + 10i)(1 + 10i)}{(1 - 10i)(1 + 10i)}\right].$$

Logo,

$$\alpha = \frac{1}{101}\left(\frac{2 + 1030i}{101}\right) = \frac{2 + 1030i}{(101)^2}.$$

O polinômio $Q = Q(t)$ é então

$$Q(t) = \frac{t}{1 - 10i} + \frac{2 + 1030i}{(101)^2}.$$

Reescrevamos

$$Q(t) = \frac{(1 + 10i)t}{101} + \frac{2 + 1030i}{(101)^2}.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA.

Melhoremos, deixando um mesmo denominador,

$$Q(t) = \frac{101(1+10i)t + (2+1030i)}{(101)^2}.$$

Ainda melhor, destacamos as partes real e imaginária,

$$Q(t) = \frac{2+101t}{(101)^2} + i\frac{1030+1010t}{(101)^2}.$$

Uma solução particular da edo complexa

$$z'' - 8z' + 41z = te^{(3+5i)t}$$

é então

$$z_p(t) = Q(t)e^{(3+5i)t} = \frac{[\,(2+101t)\ +\ i(1030+1010t)\,]\,e^{3t}(\cos 5t + i\sin 5t)}{10201}.$$

Solução Particular da EDO Real e Inicial. Uma tal solução é

$$x_p(t) = \mathrm{Re}[z_p(t)] = \frac{(2+101t)e^{3t}\cos t - (1030+1010t)e^{3t}\sin 5t}{10201}.$$

RESPOSTA FINAL . Solução Geral (e Real) da EDOLCC Inicial. A solução geral (e real) é

$$x_g(t) = c_1e^{4t}\cos 5t + c_2e^{4t}\sin 5t + \frac{(2+101t)e^{3t}\cos t - (1030+1010t)e^{3t}\sin 5t}{10201},$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias♣

4. Encontre a solução geral (e real) $x(t)$ da edol de ordem 2 dada por

$$x'' - 4x' + 13x = te^{2t}\sin 3t.$$

Solução.

Polinômio Característico. Temos

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda-2)^2 + 9 = (\lambda-2)^2 - (3i)^2 = (\lambda - 2 + 3i)(\lambda - 2 - 3i).$$

As raízes características são então

$$\lambda = 2 \pm 3i.$$

Equação Homogênea. A solução da edo homogênea associada é

$$x_h(t) = c_1 e^{2t}\cos 3t + c_2 e^{2t}\sin 3t,$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.
Equação Particular. Notando que

$$e^{2t}\sin 3t = \operatorname{Im}\left[e^{(2+3i)t}\right] = \operatorname{Im}\left[e^{2t}\cos 3t \ + \ ie^{2t}\sin 3t\right],$$

determinemos uma solução particular complexa $z = z(t)$ de

$$z'' - 4z' + 13z = te^{(2+3i)t}.$$

Procuremos uma solução particular complexa na forma

$$z(t) = Q(t)e^{(2+3i)t}.$$

Então, a função $Q = Q(t)$ satisfaz

$$\frac{p''(2+3i)}{2!}Q'' + \frac{p'(2+3i)}{1!}Q' + \frac{p(2+3i)}{0!}Q = t.$$

Notemos que

$$\begin{cases} p(\lambda) & = & \lambda^2 - 4\lambda + 13, \\ p'(\lambda) & = & 2\lambda - 4, \\ p''(\lambda) & = & 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} p(2+3i) & = & 0 \\ p'(2+3i) & = & 6i \\ p''(2+3i) & = & 2. \end{cases}$$

Assim, a função $Q = Q(t)$ satisfaz

$$\frac{2}{2!}Q'' + \frac{6i}{1!}Q' + \frac{0}{0!}Q = t.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA.

Isto é,

$$Q'' + 6iQ' = t.$$

Escolhamos $Q = Q(t)$ tal que Q' tenha a forma

$$Q^{'}(t) = \frac{t}{6i} + \alpha.$$

Notemos que então segue $Q'' = (6i)^{-1}$.

Substituindo tais expressões para Q' e Q'' na equação

$$Q'' + 6iQ' = t$$

obtemos

$$\frac{1}{6i} + 6i\left(\frac{t}{6i} + \alpha\right) = t.$$

Isto é,

$$\frac{1}{6i} + t + 6\alpha i = t.$$

Cancelando t encontramos

$$\frac{1}{6i} + 6\alpha i = 0.$$

Donde segue

$$\alpha = -\frac{1}{(6i)(6i)} = -\frac{1}{-36} = \frac{1}{36}.$$

Logo,

$$Q' = \frac{t}{6i} + \frac{1}{36}.$$

Integrando, escolhemos $Q = Q(t)$ na forma

$$Q(t) = \frac{t^2}{12i} + \frac{t}{36}.$$

Eliminando "i" no denominador obtemos

$$Q(t) = -\frac{it^2}{12} + \frac{t}{36}.$$

Reescrevamos

$$Q(t) = \frac{t - 3t^2 i}{36}.$$

Uma solução particular da edo complexa

$$z'' - 4z' + 13z = te^{(2+3i)t}$$

é então

$$z_p(t) = Q(t)e^{(2+3i)t} = \frac{(t\ -\ 3t^2 i)e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t)}{36}.$$

Solução Particular da EDO Real e Inicial. Uma tal solução é

$$x_p(t) = \mathrm{Im}[z_p(t)] = \frac{te^{2t}\sin 3t - 3t^2e^{2t}\cos 3t}{36}.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA.

RESPOSTA FINAL . Solução Geral (e Real) da EDOLCC Inicial.
A solução geral (e real) é

$$x_g(t) = c_1 e^{2t} \cos 3t + c_2 e^{2t} \sin 3t \; + \; \frac{te^{2t} \sin 3t - 3t^2 e^{2t} \cos 3t}{36},$$

onde c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias♣

5. Enuncie o Teorema da Mudança de Variável para a Integral de Riemann em uma Variável Real.