$1^{\underline{a}}$ Prova de MAT1352 - Cálculo II - IFUSP
14 de setembro de 2023

Nome : ____________________ GABARITO ____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Calcule

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \; dx.$$

Solução.

Por integração por partes, duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\
&= x^2 \sin x - 2\left[x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx\right] \\
&= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \cos x \; dx &= \left(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\right)\Big|_0^\pi \\
&= -2\pi \clubsuit
\end{aligned}$$

2. Calcule
$$\int_1^e \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Solução.

Substituamos, para t e x positivos,
$$x = t^2 \text{ ou } t = \sqrt{x}, \quad \text{e então } \frac{dx}{dt} = 2t \text{ ou } dx = 2tdt.$$

Com tal substituição encontramos
$$\begin{aligned}
\int \frac{2t\,dt}{1+t} &= \int \frac{2t+2}{1+t}\,dt - \int \frac{2}{1+t}\,dt \\
&= \int 2\,dt - 2\ln|1+t| + C \\
&= 2t - 2\ln|1+t| + C.
\end{aligned}$$

Portanto,
$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \left[2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})\right]\Big|_1^e \\
&= 2(\sqrt{e}-1) - 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right) \clubsuit
\end{aligned}$$

Comentário. Note-se que, como $x(t) = t^2$, temos
$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{1+\sqrt{x(t)}}x'(t)\,dt \\
&= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{1+\sqrt{t^2}}2t\,dt \\
&= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2t}{1+t}dt.
\end{aligned}$$

3. Esboce a região

$$A = \left\{ (x,y) \ : \ x > 0 \text{ e } \frac{1}{x^2} \leq y \leq 5 - 4x^2 \right\}.$$

Calcule a área da região A.

Solução. [Vide também H. L. Guidorizzi, Cálculo, Volume 1, 5ª ed., Editora LTC, Exercício 11.6 (22), pp. 316-317 e p. 610.]

Determinemos os pontos de intersecção. Impondo

$$\frac{1}{x^2} = 5 - 4x^2$$

obtemos

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$$

Obviamente, $x^2 = 1$ é uma solução. Então temos

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = (x^2 - 1)(4x^2 - 1).$$

Assim, as soluções com $x > 0$ são

$$x = \frac{1}{2} \text{ e } x = 1.$$

Consequentemente a área procurada é

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(5 - 4x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\
&= \left(5x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \left(5 - \frac{4}{3} + 1\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{24} + 2\right) \\
&= (5 + 1 - 2) - \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \\
&= 4 - \frac{8}{6} - \frac{15}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{24 - 8 - 15 + 1}{6} \\
&= \frac{2}{6} \\
&= \frac{1}{3} \clubsuit
\end{aligned}$$

4. Calcule
$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}\, dx.$$

Solução.

Pelo método das frações parciais podemos escrever
$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$
Multiplicando tal equação por $x+1$ e então avaliando em $x=-1$ achamos
$$A = \frac{1}{4}.$$
A seguir, multiplicando pelo mmc $4(x+1)(x^2+1)^2$ obtemos
$$4 = (x^2+1)^2 + 4(Bx+C)(x+1)(x^2+1) + 4(Dx+E)(x+1).$$
Identificando os coeficientes de x^4, x^3, x^2, x^1 e x^0, nesta ordem, obtemos
$$\begin{cases} 1+4B=0 \\ 4B+4C=0 \\ 2+4B+4C+4D=0 \\ 4B+4C+4D+4E=0 \\ 1+4C+4E=4. \end{cases}$$
Seguem
$$B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{1}{4},\quad D=-\frac{1}{2} \ \text{ e } \ E=\frac{1}{2}.$$
Escrevamos então
$$\begin{aligned} \frac{4}{(x+1)(x^2+1)^2} &= \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1} - \frac{2x-2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Computemos então cinco primitivas. As quatro primeiras são
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1}dx &= \ln|x+1| + C_1 \\ \int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{\ln(x^2+1)}{2} + c_2 \\ \int \frac{1}{x^2+1}dx &= \arctan x + c_3 \\ \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx &= -(x^2+1)^{-1} + c_4. \end{aligned}$$

Para computar a quinta primitiva

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx,$$

façamos a substituição $x = \tan\theta$, com $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\, d\theta &= 2\int \frac{sec^2\theta}{(sec^2\theta)^2}d\theta \\
&= 2\int \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta \\
&= 2\int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 2\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \int (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + c_5. \\
&= \theta + \sin\theta\cos\theta + c_5.
\end{aligned}$$

Retornando à variável x, notemos que $x = \tan\theta$ acarreta

$$\theta = \arctan x.$$

Ainda, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ fornece $\sec^2\theta = 1 + x^2$. Logo, $\sec\theta = \sqrt{1+x^2}$ e

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

A quinta primitiva é então

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx &= \arctan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c_5 \\
&= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} + c_5.
\end{aligned}$$

Resposta Final.

$$\begin{aligned}
4\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}\, dx &= \ln|x+1| - \frac{\ln(x^2+1)}{2} \\
&\quad + \arctan x + \frac{1}{x^2+1} \\
&\quad + \arctan x + \frac{x}{1+x^2} + C\, \clubsuit
\end{aligned}$$

5. Calcule

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 - 8x + 4}{x^3 - 8} dx.$$

Solução. [Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo, Vol 1, 5ª ed., Editora LTC, Exercício 12.7 (8), p. 383 e p. 621.]

Temos

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 8x + 4}{x^3 - 8} = \frac{x(x^3 - 8) + (2x^2 + 4)}{x^3 - 8} = x + \frac{2x^2 + 4}{x^3 - 8}.$$

Ainda mais,

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \text{ e } x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3.$$

Pelo Método das Frações Parciais podemos escrever

$$\frac{2x^2 + 4}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Multiplicando tal equação por $(x - 2)$ e então avaliando em $x = 2$, temos

$$\boxed{\mathrm{A} = 1}.$$

Segue

$$\frac{2x^2 + 4}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Impondo $x = 0$ obtemos

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{C}{4}.$$

Donde segue

$$\boxed{\mathrm{C} = 0}.$$

Chegamos então a

$$\frac{2x^2 + 4}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{1}{x - 2} + \frac{Bx}{x^2 + 2x + 4}.$$

Isto é,

$$2x^2 + 4 = (x^2 + 2x + 4) + Bx(x - 2).$$

Donde segue

$$\boxed{\mathrm{B} = 1}.$$

Assim, temos

$$\frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8} = x + \frac{1}{x-2} + \frac{x}{x^2+2x+4}.$$

É bem sabido que

$$\begin{aligned} \int x\,dx &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\ \int \frac{dx}{x-2} &= \ln|x-2| + c_2. \end{aligned}$$

Ainda mais, notando que $(x^2+2x+4)' = 2x+2$, escrevamos

$$\frac{x}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+4}\right) - \frac{1}{x^2+2x+4}.$$

É bem sabido que

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = \ln(x^2+2x+4) + c_3.$$

Para computar a última primitiva que nos falta notemos que

$$\frac{1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

e que

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c_4.$$

Resposta Final.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}dx &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| \\ &\quad + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c \clubsuit \end{aligned}$$