

MAT 1352 - Cálculo II - IFUSP - Segundo semestre de 2016

## INTEGRAL NA RETA

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

<http://www.ime.usp.br/~oliveira>      [oliveira@ime.usp.br](mailto:oliveira@ime.usp.br)

1. Introdução.....	3
2. Definição de Integral e Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo.....	5
3. Propriedades elementares da Integral.....	8
4. Positividade.....	11
5. Primeiro TVM para Integrais e Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.....	12
6. Continuidade da Integral.....	14
7. Fórmula de Integração por Partes.....	15
8. Teorema da Mudança de Variável.....	16
9. Substituição de Variável em Integrais Definidas e Indefinidas.....	17
10. Somas de Darboux e o Teorema de Darboux - Du Bois-Reymond.....	19
11. Desigualdade Triangular para Integrais.....	25
12. Integrabilidade do produto de funções.....	27
13. Integrabilidade de $1/f$ .....	28
14. Integrabilidade das funções monótonas.....	29
15. Integrabilidade de $\sqrt{f}$ .....	30
16. A aditividade da integral sobre intervalos, revisitada.....	31

**Continua no verso.**

17. As funções logaritmo e exponenciais reais. Os números $e$ e $\pi$ .....	33
18. Desigualdades de Cauchy-Schwarz .....	42
19. Primeiro TVM para Integrais Generalizado (versão fina).....	43
20. Funções Degrau (Escada) e Degrau Suave, e Aproximação .....	45
21. Segundo TVM para Integrais.....	51
22. O TVM de Bonnet.....	53
23. Lema de Riemann-Lebesgue.....	55
24. Integrabilidade das Funções Contínuas e Continuidade Uniforme.....	57
25. Integrabilidade de funções com conjunto finito de descontinuidades.....	60
26. Integrabilidade da composição $\varphi \circ f$ .....	62
27. Teoremas de Mudança de Variável Generalizados.....	63
28. Uma função $C^\infty$ mas não aproximável via fórmula de Taylor.....	67
29. O $\delta$ de Dirac.....	68
30. A primitiva $\int e^{-x^2} dx$ não é elementar.....	71
31. Teorema de Caracterização para Integrais de Riemann. Medida Nula.....	73
32. A identidade $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .....	82
Referências.....	85

## 1. Introdução.

Suponhamos uma torneira aberta em uma piscina e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.



Figura 1: Enchendo de água uma piscina.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos  $[0, T]$ , é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por  $Q(t)$  a quantidade de água no recipiente no instante  $t$  e introduzindo instantes intermediários

$$0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = T,$$

a variação de  $Q(t)$  no período  $[0, T]$  é a soma das variações nos subintervalos temporais. Assim,

$$(1) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n \Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]}.$$

A taxa de variação de  $Q = Q(t)$  em  $[t_{i-1}, t_i]$  coincide com (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação) a vazão (velocidade de escoamento) num determinado instante  $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Isto é, pondo

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

obtemos

$$(2) \quad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}-t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\bar{t}_i).$$

Combinando (1) e (2) encontramos

$$(3) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q|_{[t_i-t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n Q'(\bar{t}_i) \Delta t_i.$$

Definimos a **integral da função**  $Q'$  como o limite dos somatórios

$$\sum_{i=1}^n Q'(c_i) \Delta t_i, \quad c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i],$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero.

Indicamos a **integral da função**  $Q'$  por

$$\int_0^T Q'(t) dt.$$

Assim, se tal limite existir, e ele existe se a função  $Q'$  é contínua (como provaremos na seção Integrabilidade das Funções Contínuas), temos

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t) dt \clubsuit$$

**Interpretação.** A variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado.

Notando que  $Q$  é uma primitiva de  $Q'$  (pois a derivada de  $Q$  é  $Q'$ ) e trocando  $Q'$  por  $f$  é fácil ver que podemos reencuniar o resultado acima da forma abaixo.

Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $F$  uma primitiva de  $f$ , temos

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

## 2. Definição de Integral e Primeiro TFC.

**Teorema (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo).** [O valor da integral é a variação da primitiva, se esta existir.] Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann integrável e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e tais que  $F' = f$ . Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

**Prova.**

Por definição do conceito *integral de Riemann*, a função  $f$  é **limitada** e a integral de Riemann de  $f$  é dada por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i ,$$

onde

$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  é uma **partição** de  $[a, b]$ ,

$|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$  é a **norma** da partição  $\mathcal{P}$ ,

$$\mathcal{E} = \{c_1, \dots, c_n\}$$

é uma **escolha** arbitrária de pontos  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , para  $i = 1, \dots, n$ , subordinada à partição  $\mathcal{P}$  e

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

é a **soma de Riemann** de  $f$ , relativa à partição  $\mathcal{P}$  e à escolha  $\mathcal{E}$ . Dizemos então que a função  $f$  é Riemann integrável ou, brevemente, integrável.

[Logo, veremos que a hipótese “limitada” na definição de integral é supérflua.]

A seguir, seja

$$\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(x_n) - F(x_{n-1})].$$

Pelo TVM para derivadas, existe  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i.$$

Logo, como  $F'(c_i) = f(c_i)$ , a soma de Riemann de  $f$  relativa a esta partição  $\mathcal{P}$  e a esta particular escolha  $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  é

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n F'(c_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Assim, para toda partição  $\mathcal{P}$  existe uma escolha  $\mathcal{E}$  tal que o valor da soma de Riemann correspondente é  $F(b) - F(a)$ .

Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido

$$F(b) - F(a) \clubsuit$$

**Comentário.** A hipótese “limitada” na definição de integral é supérflua.

De fato, sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , um número real  $I$ , um número natural  $n$  e uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$ , com  $\Delta x_i = \Delta = (b - a)/n$  se  $i = 1, \dots, n$ , tais que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i - I \right| < 1, \text{ para todos } c_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ e } i = 1, \dots, n.$$

Consideremos um arbitrário  $p \in [a, b]$ . Seja  $j$  tal que  $p \in [x_{j-1}, x_j]$ . Segue

$$\left| f(p)\Delta + \sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta - I \right| < 1.$$

Pela desigualdade triangular  $|x| - |y| \leq |x + y|$ , segue

$$|f(p)\Delta| < 1 + \left| \sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta - I \right|.$$

Pela desigualdade triangular  $|x + y| \leq |x| + |y|$  segue

$$|f(p)\Delta| < 1 + |I| + \left| \sum_{i \neq j} f(x_i)\Delta \right|.$$

Aplicando sucessivamente a desigualdade triangular  $|x+y| \leq |x|+|y|$  encontramos

$$|f(p)\Delta| < 1 + |I| + \sum_{i \neq j} |f(x_i)\Delta|.$$

Donde segue

$$|f(p)\Delta| \leq 1 + |I| + [|f(x_0)| + \cdots + |f(x_j)| + \cdots + |f(x_n)|]\Delta.$$

Por fim, temos

$$|f(p)| \leq \frac{1 + |I|}{\Delta} + |f(x_0)| + \cdots + |f(x_j)| + \cdots + |f(x_n)|,$$

para todo ponto  $p$  em  $[a, b]$ . Logo,  $f$  é limitada ♣

Nem toda função integrável admite primitiva. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

é integrável em  $[-1, 1]$  mas, não existe  $F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável tal que  $F' = f$  em todo ponto de  $[-1, 1]$ . Verifique.

Assumiremos, por algumas seções, o seguinte resultado,

**Teorema (Existência da integral para funções contínuas).** *Consideremos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então,  $f$  é Riemann integrável.*

**Prova.** Vide seção Integrabilidade das funções contínuas.

### 3. Propriedades Elementares da Integral.

**Proposição (Linearidade da Integral).** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções integráveis e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, as funções  $f + g$  e  $\lambda f$  são integráveis. Ainda mais,*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad e \quad \int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

**Prova.**

- ◇ Propriedade da soma. Utilizemos a definição de integral. Dado  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta_1 > 0$  tal que para toda partição  $\mathcal{P}_1$  com norma  $|\mathcal{P}_1| < \delta_1$  e para toda escolha  $\mathcal{E}_1$  subordinada à partição  $\mathcal{P}_1$  temos

$$\left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, existe um  $\delta_2 > 0$  tal que para toda partição  $\mathcal{P}_2$  com norma  $|\mathcal{P}_2| < \delta_2$  e para toda escolha  $\mathcal{E}_2$  subordinada à partição  $\mathcal{P}_2$  temos

$$\left| S(g, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos então  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Desta forma, para toda partição  $\mathcal{P}$  com norma  $|\mathcal{P}| < \delta$  e para toda escolha  $\mathcal{E}$  subordinada à partição  $\mathcal{P}$  temos

$$\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad \left| S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} & \left| S(f + g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[ \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \right] \right| = \\ & = \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) + S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| \\ & \leq \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x)dx \right| + \left| S(g, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

A prova da propriedade da soma está completa.



◇ A propriedade da multiplicação por escalar. Dado  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para toda partição  $\mathcal{P}$  com norma  $|\mathcal{P}| < \delta$  e para toda escolha  $\mathcal{E}$  subordinada à partição  $\mathcal{P}$  temos

$$\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Donde segue

$$\begin{aligned} \left| S(\lambda f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \lambda \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \lambda S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \lambda \int_a^b f(x) dx \right| \\ &= \left| \lambda \left[ S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x) dx \right] \right| \\ &= |\lambda| \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq |\lambda| \frac{\epsilon}{|\lambda| + 1} \\ &= \left( \frac{|\lambda|}{|\lambda| + 1} \right) \epsilon \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

A prova da propriedade para a multiplicação por escalar está completa.♣

**Proposição (Aditividade da Integral sobre Intervalos, primeira abordagem).** *Seja  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e um ponto  $b \in (a, c)$ . Suponhamos que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e que  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável. Então, temos*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

**Prova.**

Dado  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  arbitrariamente pequeno satisfazendo as duas condições abaixo.

- (1) Existe uma partição  $\mathcal{P}_1$  de  $[a, b]$ , com norma  $|\mathcal{P}_1| < \delta$ , e uma escolha  $\mathcal{E}_1$  subordinada à partição  $\mathcal{P}_1$  tal que

$$\left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

(2) Existe uma partição  $\mathcal{P}_2$  de  $[b, c]$ , com norma  $|\mathcal{P}_2| < \delta$ , e uma escolha  $\mathcal{E}_2$  subordinada à partição  $\mathcal{P}_2$  tal que

$$\left| S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_b^c f(x)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam a partição  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  e a escolha  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ . Segue então

$$\begin{aligned} & \left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[ \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right] \right| \\ &= \left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) + S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \right| \\ &\leq \left| S(f, \mathcal{P}_1, \mathcal{E}_1) - \int_a^b f(x)dx \right| + \left| S(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{E}_2) - \int_b^c f(x)dx \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Isto é, dado  $\epsilon > 0$  encontramos uma soma de Riemann  $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  para  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ , com a norma de  $\mathcal{P}$  arbitrariamente pequena, satisfazendo

$$\left| S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) - \left[ \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \right] \right| < \epsilon.$$

Entretanto, por hipótese a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e então existe o valor para o limite de suas somas de Riemann, com a norma da partição tendendo a zero. Pela unicidade do limite segue então (**cheque**)

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \clubsuit$$

**Notação.** Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e um ponto  $c \in [a, b]$ , escrevemos

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_c^c f(x)dx = 0.$$

#### 4. Positividade.

**Teorema (Propriedade de Positividade).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  integrável. Suponhamos que existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f$  é contínua em  $x_0$  e  $f(x_0) > 0$ . Então,*

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

**Prova.**

Suporemos  $x_0 \in (a, b)$  pois a prova é semelhante nos casos  $x_0 = a$  e  $x_0 = b$ . Por continuidade, existe um intervalo  $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$  tal que

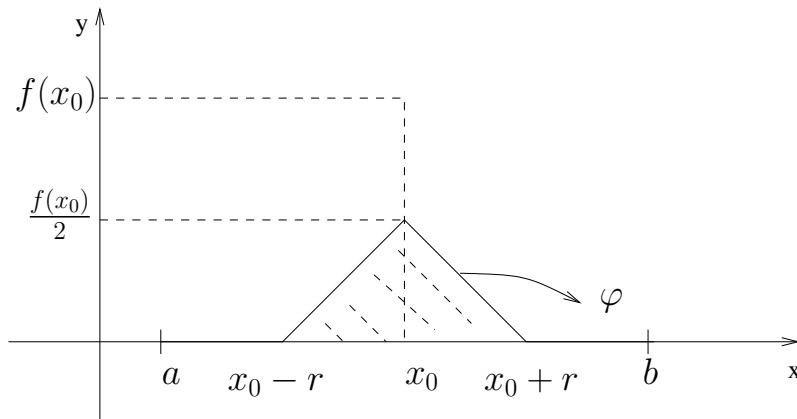


Figura 2: A integral de  $\varphi$ , com  $f \geq \varphi \geq 0$ .

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Então, a função  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (vide figura acima) definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} & \text{e} \\ \text{linear sobre os segmentos } [x_0 - r, x_0] \text{ e } [x_0 + r, b], \end{cases}$$

é contínua e satisfaz  $f(x) \geq \varphi(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Ainda mais,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\geq \int_a^b \varphi(x) dx \\ &= \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \varphi(x) dx \\ &= \frac{f(x_0)r}{2} > 0 \clubsuit \end{aligned}$$

## 5. Primeiro TVM para Integrais (versão fina) e Segundo TFC.

**Teorema. Primeiro TVM para Integrais. (Versão fina.)** Consideremos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

**Prova.** Vide interpretação geométrica abaixo.

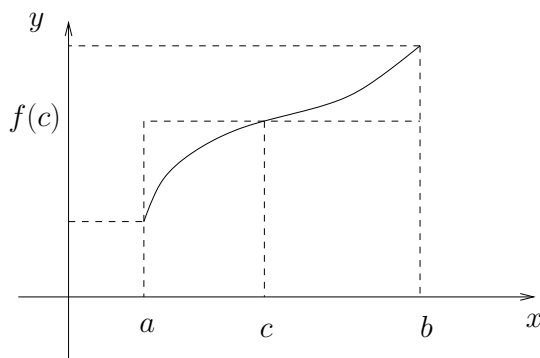


Figura 3: Interpretação geométrica ao Primeiro TVM para Integrais. A área abaixo do gráfico de  $f > 0$  é igual à área do retângulo de base  $[a, b]$  e altura  $f(c)$ .

Se  $f$  é constante é óbvio que qualquer  $c$  em  $(a, b)$  satisfaz o desejado.

Se  $f$  não é constante, sejam  $m = f(x_1)$  e  $M = f(x_2)$  o mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente. Então obtemos  $m \leq f(x) \leq M$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Pelo teorema do valor intermediário existe  $x_0 \in [a, b]$  com  $m < f(x_0) < M$ . Pela propriedade de positividade (para  $f - m$  e  $M - f$ ) segue

$$\int_a^b [f(x) - m] dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b [M - f(x)] dx > 0.$$

Logo,

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx \quad \text{e} \quad m < \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $c$  no intervalo aberto de extremidades  $x_1$  e  $x_2$  tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \clubsuit$$

### Interpretação Aritmética para o Primeiro TVM para Integrais.

Dados  $n$  números reais  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , a sua média aritmética (discreta)  $M$  é

$$M = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n 1}.$$

Analogamente, dada uma coleção de números  $y = f(x)$ , onde  $a \leq x \leq b$ , interpretamos o número

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a},$$

como a média aritmética dos valores  $f(x)$  [ou, média aritmética de  $f$ ], obviamente supondo  $a < b$  e que a integral existe.

Com tal interpretação, o primeiro teorema do valor médio para integrais mostra que dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, então existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \text{média aritmética de } f.$$

Passamos então a provar o segundo teorema fundamental do cálculo.

**Teorema (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo).** [A existência de primitivas para funções contínuas.] *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então, está bem definida a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

*e ainda,  $F$  é uma primitiva de  $f$ . Isto é,  $F$  é derivável e*

$$F'(x) = f(x), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

**Prova.**

- ◇ Como  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , segue que  $f$  é integrável no intervalo  $[a, x]$  para cada  $x \in [a, b]$ . Por favor, cheque.
- ◇ Propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais mostram

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \\
&= \frac{f(c)h}{h} = f(c),
\end{aligned}$$

para algum  $c = c(h)$  entre  $x$  e  $x + h$ . Se  $h \rightarrow 0$ , então  $c \rightarrow x$  e devido à continuidade de  $f$  segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c(h)) = f(x),$$

o que prova que  $F$  é derivável e que

$$F' = f \clubsuit$$

## 6. Continuidade da Integral.

**Teorema (Continuidade da Integral).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então, está bem definida a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ onde } x \in [a, b].$$

*Ainda mais,  $F$  é contínua.*

**Prova.**

- ◇ Como  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , segue que  $f$  é integrável em  $[a, x]$ .
- ◇ Fixemos  $x \in [a, b]$ . Seja  $h$  tal que  $x + h$  pertence a  $[a, b]$ . Então, temos

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\
&= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t) dt.
\end{aligned}$$

Como  $f$  é integrável, por hipótese  $f$  é limitada. Seja  $M$  tal que  $|f(t)| \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$ . Então, temos  $-M \leq f(t) \leq M$  para todo  $t \in [a, b]$ . Donde então segue

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq M|h|.$$

Concluimos então que  $f(x+h) \rightarrow F(x)$  se  $h \rightarrow 0$  ♣

## 7. Fórmula de Integração por Partes.

### Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida).

Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis em  $(a, b)$ . Então,  $f'g$  admite primitiva em  $(a, b)$  se e só se  $fg'$  também admite e, neste caso,

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

#### Prova.

Pela fórmula  $(fg)' = f'g + fg'$  temos

$$fg' = (fg)' - f'g,$$

donde concluímos que  $\psi$  é uma primitiva de  $f'g$  se e somente se  $fg - \psi$  é uma primitiva de  $fg'$ . Isto é,  $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg - \psi)' = fg'$  ♣

**Notação.** Lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

### Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida).

Sejam  $f$  e  $g$  funções com derivadas contínuas em  $[a, b]$ . Então,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)] \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

#### Prova.

Pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = [f(x)g(x)] \Big|_a^b.$$

Da fórmula  $(fg)' = f'g + fg'$  e da linearidade da integral definida segue que

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Eliminando

$$\int_a^b (fg)'(x) dx$$

das duas equações acima obtidas concluímos a prova ♣

## 8. Teorema da Mudança de Variável.

Consideremos o problema de encontrar

$$\int f(x)dx.$$

**Teorema da Mudança de Variável na Integral Indefinida.** *Seja  $I$  um intervalo e consideremos a função*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*Suponhamos que a função [a mudança de variável]*

$$\varphi : J \longrightarrow I, \text{ onde } J \text{ é um intervalo,}$$

*é inversível e derivável com inversa  $\varphi^{-1} : I \longrightarrow J$  também derivável. Se*

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + k, \text{ onde } t \in J \text{ e } k \text{ é uma constante real,}$$

*então temos*

$$\boxed{\int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + k.}$$

**Prova.**

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre  $F$  e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f\left(\varphi(\varphi^{-1}(x))\right) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x) \cdot 1 \\ &= f(x) \clubsuit \end{aligned}$$



## 9. Teoremas da Substituição de Variável.

Primeiro, consideremos o problema de encontrar

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

**Teorema da Substituição de Variável na Integral Indefinida.** *Seja  $I$  um intervalo e suponhamos a função*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*tem uma primitiva  $F$ . Então,*

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + k, \text{ onde } k \text{ é uma constante real.}$$

**Prova.**

Aplicando a regra da cadeia e a hipótese sobre  $F$ , obtemos

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \clubsuit$$

Sugestão para memorizar (mas não rigorosa). Temos

$$y = g(x) \quad \text{e então} \quad \frac{dy}{dx} = g'(x) \quad \text{ou} \quad dy = g'(x)dx.$$

Logo,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy = F(y) + k, \quad \text{com } y = g(x).$$

**Teorema da Substituição de Variável na Integral Definida.** *Consideremos uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua,  $I$  um intervalo e  $a$  e  $b$  arbitrários em  $I$ . Seja  $\varphi : [c, d] \rightarrow I$  tal que  $\varphi'$  é contínua e  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ . Então,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy.$$

**Atenção.** *Não é necessário  $a < b$ . Não é necessário que  $\varphi$  seja inversível. Não é necessário  $\varphi([c, d]) = [a, b]$ . É permitido que  $\varphi([c, d])$  inclua propriamente  $[a, b]$ .*

**Prova.**

Como  $f$ ,  $\varphi$  e  $\varphi'$  são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua  $f$  admite uma primitiva  $F$ . Então, pelo primeiro Teorema Fundamental do Cálculo encontramos

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y).$$

Então, aplicando novamente o primeiro TFC obtemos

$$\begin{aligned} \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy &= (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx \clubsuit \end{aligned}$$

## 10. Somas de Darboux<sup>1</sup> e o Teorema de Darboux - Du Bois-Reymond.

Consideremos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. A **integral de Riemann** de  $f$  é definida pelo limite (se este existir)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i,$$

onde  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  é uma **partição** de  $[a, b]$ ,

$|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$  é a **norma** da partição  $\mathcal{P}$ ,

$\mathcal{E} = \{c_1, \dots, c_n\}$  é uma **escolha**

arbitrária de pontos  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , com  $i = 1, \dots, n$ , subordinada a  $\mathcal{P}$  e

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) = f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n,$$

é a **soma de Riemann** de  $f$ , relativa à partição  $\mathcal{P}$  e à escolha  $\mathcal{E}$ .

A **soma inferior** de Darboux e a **soma superior** de Darboux da função  $f$  e em relação à partição  $\mathcal{P}$  são, respectivamente,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Segue uma ilustração para as somas de Darboux de uma função.

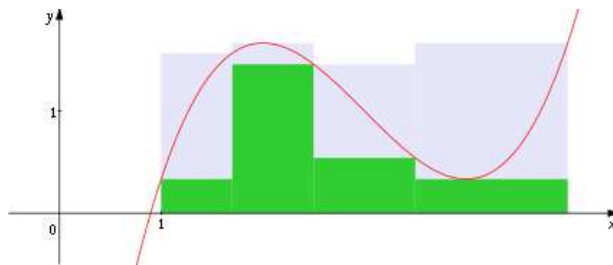


Figura 4: Soma inferior e soma superior (Darboux), com quatro sub-intervalos.

---

<sup>1</sup>Estes conceitos foram introduzidos pelo matemático francês G. Darboux (1842-1917)

**Notação.** Dado  $A \subset [a, b]$ , definimos

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : x \in A\} \quad \text{e} \quad \sup_A f = \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

A seguir, mostremos que à medida que refinamos as partições (incluindo mais e mais pontos), então as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem. Ainda mais, toda soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior.

**Observação 1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se  $I$  e  $J$  são subintervalos de  $[a, b]$  e  $I \subset J$ , então

$$\inf_J f \leq \inf_I f \leq \sup_I f \leq \sup_J f.$$

(b) Se  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  são partições de  $[a, b]$  então, ordenando naturalmente  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , temos que também  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  é uma partição de  $[a, b]$ . Ainda mais,

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

(c) Se  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $[a, b]$  e  $\mathcal{E}$  é uma escolha subordinada a  $\mathcal{P}$  então,

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

**Prova.**

(a) Trivial.

(b) A primeira afirmação é evidente. Se  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é um subintervalo determinado pela partição  $\mathcal{P}_1$  então  $I_i$  é a reunião dos subintervalos  $J_j = [y_{j-1}, y_j]$ , para  $j = 1, \dots, N$  e  $N \geq n$ , determinados pela partição  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  e que estão contidos em  $I_i$ . Pelo item (a) temos as inequações

$$\left(\inf_{I_i} f\right) \Delta x_i = \left(\inf_{I_i} f\right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j \leq \sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\inf_{J_j} f\right) \Delta y_j \quad \text{e}$$

e

$$\sum_{j : J_j \subset I_i} \left(\sup_{J_j} f\right) \Delta y_j \leq \left(\sup_{I_i} f\right) \sum_{j : J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\sup_{I_i} f\right) \Delta x_i.$$

Destacando o primeiro e o terceiro termos destas e somando em  $i$  segue

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1).$$

Analogamente,  $S(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2)$ . Agora, (b) é trivial.

(c) Evidente♣

Dizemos que a partição  $\mathcal{Q}$  **refina** a partição  $\mathcal{P}$  se  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ .

A figura abaixo mostra que ao refinarmos a partição então as somas inferiores crescem e as somas superiores decrescem.

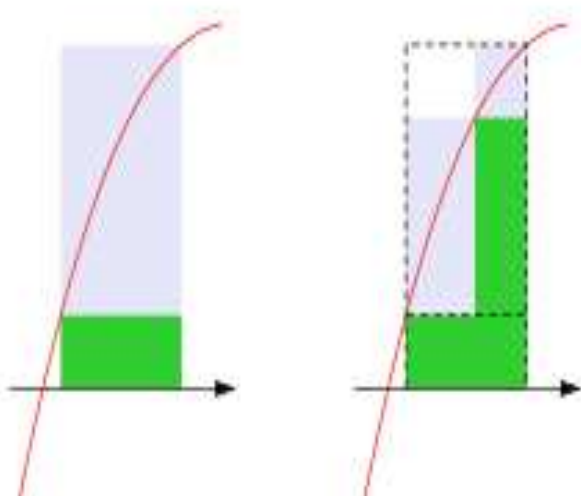


Figura 5: Somas inferiores aumentam e somas superiores diminuem.

**Proposição .** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, então existem

$$\begin{cases} \alpha = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \\ e \\ \beta = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \end{cases}$$

e, ainda, temos  $\alpha \leq \beta$ .

**Prova.** Segue imediatamente da observação prévia, item (b)♣

O número  $\alpha$  é a **integral inferior** de Darboux de  $f$ . O número  $\beta$  é a **integral superior** de Darboux de  $f$ . Usualmente indicamos a integral inferior e a integral superior (ambas de Darboux) por, respectivamente,

$$\int_a^b f(x)dx \quad e \quad \overline{\int}_a^b f(x)dx.$$

Dizemos que  $f$  é **Darboux-integrável** se os valores destas integrais inferior e superior são iguais. Tal valor é a **integral de Darboux** de  $f$ . Tal integral é indicada

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A notação para a integral de Darboux é igual à dada para a integral de Riemann. O próximo teorema mostra que uma função  $f$  é Riemann integrável se e somente se  $f$  é Darboux integrável e que tais integrais são iguais. Logo, não há ambiguidade ao indicarmos tais integrais com um mesmo símbolo.

Intitulo o resultado a seguir de *Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond*, enfatizando o caráter não clássico, por praticidade, falta de um melhor nome e, é claro, por merecimento. O enunciado clássico é apresentado como um corolário.

Observemos que o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond exibe um *critério (de Darboux ou de Cauchy)* de integrabilidade bastante prático e que não requer um número como candidato para o valor da integral da função.

**Teorema (Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, não clássico) - Critério de Darboux - Critério de Cauchy.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Então,  $f$  é Riemann integrável se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$  tal que*

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

**Prova.**

( $\Leftarrow$ ) Sob tal hipótese, claramente as integrais inferior e superior (de Darboux) são iguais a um número real  $L$ . No fim da prova utilizaremos  $L$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , fixemos uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  como na hipótese. Seja  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ .

Seja  $\mathcal{Q}$  uma partição arbitrária de  $[a, b]$ . Consideremos então a partição  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ . Todo sub-intervalo determinado por  $\mathcal{Q}'$  coincide com um sub-intervalo determinado por  $\mathcal{Q}$ , exceto no caso em que o determinado por  $\mathcal{Q}'$  contém ao menos um ponto do conjunto  $\mathcal{P} \setminus \{a, b\} = \{x_1 < \dots < x_{n-1}\}$ . Como  $\mathcal{P} \setminus \{a, b\}$  tem  $n - 1$  pontos, tal exceção ocorre no máximo  $n - 1$  vezes. Os sub-intervalos de  $\mathcal{Q}'$  tem comprimento máximo  $|\mathcal{Q}|$ . Obtemos então

$$0 \leq [S(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{Q})] - [S(f, \mathcal{Q}') - s(f, \mathcal{Q}')] \leq 2M(n - 1)|\mathcal{Q}|.$$

Imponhamos a condição  $|\mathcal{Q}| < \delta = \epsilon/(2Mn)$ . Encontramos então

$$0 \leq S(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{Q}) < \epsilon + [S(f, \mathcal{Q}') - s(f, \mathcal{Q}')] < \epsilon + [S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})] < 2\epsilon.$$

Donde então segue

$$L - 2\epsilon \leq s(f, \mathcal{Q}) \leq L \leq S(f, \mathcal{Q}) \leq L + 2\epsilon, \text{ para toda } \mathcal{Q} \text{ com } |\mathcal{Q}| < \delta = \frac{\epsilon}{2Mn}.$$

Seja  $\mathcal{E}$  uma escolha arbitrária subordinada à partição  $\mathcal{Q}$ . É claro que

$$s(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Logo,

$$|S(f, \mathcal{Q}, \mathcal{E}) - L| < 2\epsilon.$$

Isto mostra que  $f$  é Riemann integrável.

( $\Rightarrow$ ) Sejam  $\epsilon > 0$  e

$$L = \int_a^b f(t) dt.$$

Por hipótese, existe uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  tal que

$$L - \epsilon < S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) < L + \epsilon,$$

qualquer que seja a escolha  $\mathcal{E} = \{c_1, \dots, c_n\}$ , onde  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Sejam

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Fixemos  $c_2, c_3, \dots, c_n$ . Variando  $c_1$  em  $[x_0, x_1]$  obtemos

$$L - \epsilon \leq m_1 \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(c_i) \Delta x_i \leq S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq M_1 \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(c_i) \Delta x_i \leq L + \epsilon.$$

A seguir, variando  $c_2 \in [x_1, x_2]$  obtemos

$$L - \epsilon \leq m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \sum_{i=3}^n f(c_i) \Delta x_i \leq M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \sum_{i=3}^n f(c_i) \Delta x_i \leq L + \epsilon.$$

Iterando encontramos

$$L - \epsilon \leq s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}) \leq L + \epsilon.$$

Donde segue

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \epsilon \clubsuit$$

## Comentários.

- Mantida as notações acima, o número  $M_i - m_i$  coincide com a oscilação

$$\omega_i = \sup \{ |f(x) - f(x')| : x, x' \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

da função  $f$  no sub-intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

- Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. O teorema acima garante que

$$\text{existe } \int_a^b f(x)dx \iff \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

Destaquemos que se  $f$  é Riemann integrável, então temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}.$$

A integral de Riemann (definida por um limite de somas de Riemann) é apropriada para teoria da aproximação. Mas, a priori, as integrais de Darboux não tem tal propriedade.

O *Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond* mostra que a integral de Darboux (se existir) também é apropriada para a teoria da aproximação.

### **Teorema (Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, enunciado clássico).**

Consideremos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Então,  $f$  é Darboux integrável se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que temos

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon$$

para toda partição  $\mathcal{P}$ , de  $[a, b]$ , satisfazendo  $|\mathcal{P}| < \delta$ .

**Prova.** Trivial (cheque) ♣

O teorema de Darboux - Du Bois-Reymond (enunciado não clássico) apresenta um critério que permite exibirmos mais propriedades da integral.

Doravante, nestas notas, nos referimos somente ao não clássico Teorema de Darboux e Du Bois-Reymond.



## 11. A Desigualdade Triangular para Integrais.

**Teorema.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então,  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

**Prova.**

Obviamente, a função  $|f|$  é limitada.

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  uma partição de  $[a, b]$ . Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

respectivamente, com as notações

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Dados  $s$  e  $t$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  temos que  $f(s)$  e  $f(t)$  estão em  $[m_i, M_i]$ . Logo,

$$\left| |f(s)| - |f(t)| \right| \leq |f(s) - f(t)| \leq M_i - m_i.$$

Donde então segue (cheque)

$$\left| \sup_{s \in [x_{i-1}, x_i]} |f(s)| - \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} |f(t)| \right| \leq M_i - m_i.$$

Obtemos então a desigualdade

$$\left| S(|f|, \mathcal{P}) - s(|f|, \mathcal{P}) \right| \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}).$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$ . **Cheque ♣**

**Corolário (Desigualdade Triangular para Integrais).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então, a função  $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Prova.**

Observemos que temos

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Pelas hipóteses e pelo teorema imediatamente anterior temos

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Donde segue

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \clubsuit$$

**Observação.** O nome *desigualdade triangular para integrais* é herdado da usual *desigualdade triangular discreta* para uma sequência finita  $y_1, \dots, y_n$  de números reais,

$$|y_1 + y_2 + \dots + y_n| \leq |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|.$$

Isto é,

$$\left| \sum_{i=1}^n y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

## 12. Integrabilidade do Produto de Funções.

**Lema.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então,  $f^2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

**Prova.**

A função  $|f|$  é integrável (seção anterior) e então podemos supor  $f \geq 0$ .

Como  $f$  é limitada, existe uma constante  $M > 0$  satisfazendo  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Logo,  $f^2$  é limitada

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  uma partição. Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde  $m_i$  e  $M_i$  são o ínfimo e o supremo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , respectivamente.

Temos então

$$\begin{aligned} S(f^2, \mathcal{P}) - s(f^2, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (M_i^2 - m_i^2) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(M_i + m_i) \Delta x_i \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

Isto é,

$$0 \leq S(f^2, \mathcal{P}) - s(f^2, \mathcal{P}) \leq 2M[S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})].$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$ . **Cheque ♣**

**Teorema.** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis. Então,  $fg$  é integrável.*

**Prova.** Segue imediatamente do lema acima, notando que

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \quad \clubsuit$$

### 13. Integrabilidade de $1/f$ .

**Proposição.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Suponhamos que existe uma constante  $m > 0$  satisfazendo  $|f(x)| \geq m > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então, a função*

$$\frac{1}{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

*é integrável.*

**Prova.**

Iniciemos verificando que a função  $1/f$  é limitada. De fato, temos

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{m}, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  uma partição de  $[a, b]$ . Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \text{ e } s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde  $m_i$  e  $M_i$  são o ínfimo e o supremo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , respectivamente.

Consideremos  $s, t \in [x_{i-1}, x_i]$ . Temos

$$\left| \frac{1}{f(s)} - \frac{1}{f(t)} \right| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)||f(t)|} \leq \frac{|f(s) - f(t)|}{m^2} \leq \frac{M_i - m_i}{m^2}.$$

Segue então (cheque)

$$\left| \sup_{s \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(s)} - \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(t)} \right| \leq \frac{M_i - m_i}{m^2}.$$

Donde encontramos

$$0 \leq S\left(\frac{1}{f}, \mathcal{P}\right) - s\left(\frac{1}{f}, \mathcal{P}\right) \leq \frac{S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})}{m^2}.$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond, que a função  $1/f$  é integrável em  $[a, b]$ . **Cheque ♣**

## 14. Integrabilidade das Funções Monótonas.

Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $X$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , é uma função monótona se  $f$  é ou crescente, ou estritamente crescente, ou decrescente, ou estritamente decrescente. Notemos que toda função constante é crescente e também decrescente.

**Teorema (Integrabilidade das funções monótonas).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona. Então,  $f$  é integrável.*

**Prova.**

Podemos supor  $f$  não constante, pois o caso contrário é óbvio.

Trocando  $f$  por  $-f$ , se necessário, podemos supor que  $f$  é crescente.

Temos  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ , para todo  $x \in [a, b]$ , e portanto  $f$  é limitada.

Dado  $\epsilon$ , consideremos uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 < \dots < x_n = b\}$  com norma

$$|\mathcal{P}| < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum f(x_i) \Delta x_i - \sum f(x_{i-1}) \Delta x_i \\ &= \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \\ &\leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\epsilon [f(b) - f(a)]}{f(b) - f(a)} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de Darboux - Du Bois-Reymond,  $f$  é integrável ♣

## 15. Integrabilidade de $\sqrt{f}$ .

**Proposição.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  integrável. Suponhamos que existe uma constante  $m > 0$  satisfazendo  $f(x) \geq m > 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então, a função*

$$\sqrt{f} : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$$

*é integrável.*

**Prova.**

Verifiquemos que a função  $1/\sqrt{f}$  é limitada. De fato, temos

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  uma partição de  $[a, b]$ .

Consideremos as somas superior e inferior de Darboux

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

onde  $m_i$  e  $M_i$  são o ínfimo e o supremo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , respectivamente.

Donde segue

$$S(\sqrt{f}, \mathcal{P}) = \sum \sqrt{M_i} \Delta x_i \quad \text{e} \quad s(\sqrt{f}, \mathcal{P}) = \sum \sqrt{m_i} \Delta x_i.$$

Encontramos então

$$\begin{aligned} S(\sqrt{f}, \mathcal{P}) - s(\sqrt{f}, \mathcal{P}) &= \sum \left( \sqrt{M_i} - \sqrt{m_i} \right) \Delta x_i = \sum \left( \frac{M_i - m_i}{\sqrt{M_i} + \sqrt{m_i}} \right) \Delta x_i \\ &\leq \sum \left( \frac{M_i - m_i}{2m} \right) \Delta x_i \\ &= \frac{S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})}{2m}. \end{aligned}$$

Isto mostra, utilizando duas vezes o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que a função  $1/f$  é integrável em  $[a, b]$ . Cheque ♣

## 16. A Aditividade da Integral sobre Intervalos, Revisitada.

Na seção Propriedades Elementares da Integral, já fizemos uma primeira abordagem à propriedade aditiva da integral sobre intervalos. Com o conceito “Somadas de Darboux” podemos melhorar o resultado então obtido.

**Proposição (Aditividade da Integral sobre Intervalos).** *Consideremos uma função  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  e um ponto  $b \in (a, c)$ . Então,  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se e somente se as funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  são integráveis. Ainda mais, se tais funções são integráveis, vale a fórmula*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

**Prova.**

A fórmula já foi provada na seção Propriedades Elementares da Integral. Provamos então a parte “se e somente se.”

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável. Seja  $\epsilon > 0$ .

Pelo teorema de Darboux (e de Du Bois-Reymond), existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, c]$  tal que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Consideremos a partição  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{b\}$ . Pelas propriedades das somas inferiores e superiores de Darboux segue

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}') \leq S(f, \mathcal{P}).$$

Logo,

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}') < \epsilon.$$

Podemos escrever  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , com  $\mathcal{P}_1$  uma partição de  $[a, b]$  e  $\mathcal{P}_2$  uma partição de  $[b, c]$ . Temos então

$$s(f, \mathcal{P}') = s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}') = S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2).$$

Substituindo tais identidades na última desigualdade obtida, segue

$$0 \leq [S(f, \mathcal{P}_1) - s(f, \mathcal{P}_1)] + [S(f, \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_2)] < \epsilon.$$

É então claro que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}_1) - s(f, \mathcal{P}_1) < \epsilon \quad \text{e} \quad 0 \leq S(f, \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_2) < \epsilon.$$

Isto mostra, utilizando o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e a função  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  são integráveis.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável.

Seja  $\epsilon > 0$ . Pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, existe uma partição  $\mathcal{P}_1$  de  $[a, b]$  e uma partição  $\mathcal{P}_2$  de  $[b, c]$  satisfazendo

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}_1) - s(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq S(f, \mathcal{P}_2) - s(f, \mathcal{P}_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Somando tais desigualdades encontramos

$$0 \leq [S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2) - [s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2)]] < \epsilon.$$

É claro que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  é uma partição de  $[a, c]$  e também que

$$s(f, \mathcal{P}) = s(f, \mathcal{P}_1) + s(f, \mathcal{P}_2) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}) = S(f, \mathcal{P}_1) + S(f, \mathcal{P}_2).$$

Substituindo tais identidades na última desigualdade acima, segue

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Isto mostra, utilizando o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, que  $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.

A prova da proposição está completa. ♣



## 17. As Funções Logaritmo e Exponencial Reais

**Definição.** A função logaritmo real,  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ , é dada por

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

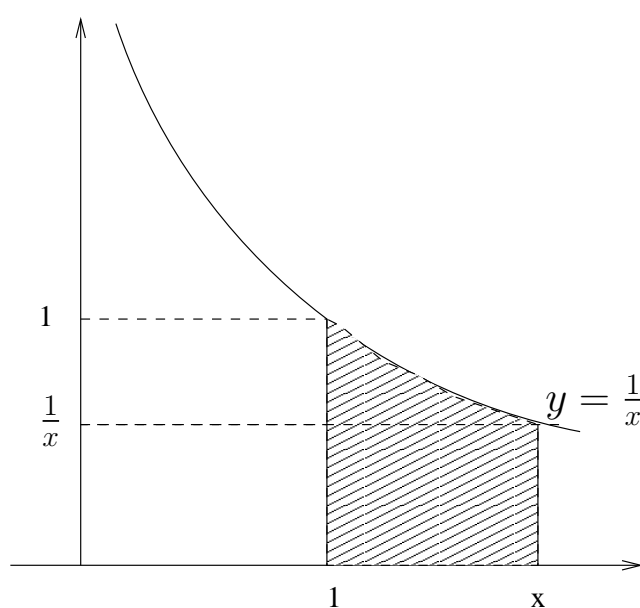


Figura 6: A área da região hachurada é  $\ln x$

**Teorema.** A função  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  possui as seguintes propriedades.

(a) Se  $0 < x < 1$ , então  $\ln x < 0$ . Tem-se  $\ln 1 = 0$ . Se  $x > 1$ , então  $\ln x > 0$ .

(b) Estritamente crescente.

(c) Infinitamente derivável, com

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ e } \frac{d^m \ln}{dx^m}(x) = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{x^m}, m \geq 1.$$

(d) Dados  $x > 0$  e  $y > 0$ , temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{1}{y} = -\ln y \quad \text{e} \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

(e) Dados  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $r \in \mathbb{Q}$ , temos

$$\ln(x^r) = r \ln(x).$$

**Prova.**

(a) É claro que  $\ln(1) = 0$  e que  $\ln(x) > 0$  se  $x > 1$ . Se  $0 < x < 1$ , temos

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0.$$

(b) Se  $x_2 > x_1 > 0$ , então

$$\ln(x_2) = \int_1^{x_2} \frac{1}{t} dt = \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t} dt > \int_1^{x_1} \frac{1}{t} dt = \ln(x_1).$$

(c) A primeira derivada é trivial. A fórmula geral segue por indução (cheque).

(d) Temos,

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Nesta última integral, a mudança de variável de  $t$  para  $s$ , onde

$$t = sx \quad \text{e} \quad \frac{dt}{ds} = t'(s) = x,$$

acarreta

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{1}{t(s)} t'(s) ds = \int_1^y \frac{x}{sx} ds = \int_1^y \frac{1}{s} ds = \ln(y).$$

A prova de  $\ln xy = \ln x + \ln y$  está completa. A seguir, temos

$$0 = \ln(1) = \ln\left(y \frac{1}{y}\right) = \ln(y) + \ln \frac{1}{y} \quad \text{e então} \quad \ln \frac{1}{y} = -\ln y.$$

Logo,

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

(e) Pela propriedade  $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ , a afirmação (e) vale se  $r = n \in \mathbb{N}$ .

Ainda mais, escrevendo  $0 = \ln 1 = \ln(x^n x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n})$  obtemos  $\ln(x^{-n}) = -\ln(x^n) = -n \ln x$ . Logo, (e) vale se  $r = -n$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Se  $r = p/q$ , com  $p \in \mathbb{Z}^*$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ , temos as três seguintes identidades:  
 $p \ln x = \ln x^p = \ln (x^{\frac{p}{q}})^q = q \ln x^{\frac{p}{q}}$ . Donde segue,

$$\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln(x) \clubsuit$$

**Corolário.** A função  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é inversível e a inversa é contínua.

**Prova.**

Sobre o conjunto imagem  $\ln((0, +\infty))$ , a função  $\ln(\cdot)$  é obviamente sobrejetora. Já mostramos que a função  $\ln(\cdot)$  é estritamente crescente, e portanto injetora, e contínua. Pelo teorema do valor intermediário, a imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo.

Assim, a imagem  $\ln((0, +\infty))$  é um intervalo. Como  $\ln(\cdot)$  é estritamente crescente, a imagem  $\ln((0, +\infty))$  é um intervalo aberto  $(a, b)$ .

É então fácil ver que  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$  pois, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln 2^{\pm n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\pm n \ln 2] = \pm \infty.$$

Vimos que  $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, estritamente crescente e bijetora.

A seguir, mostremos que a função inversa  $\ln^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  é contínua. Consideremos um número  $y_0 \in \mathbb{R}$  e um intervalo  $J = [a, b] \subset (0, \infty)$  tal que  $\ln^{-1}(y_0) \in (a, b)$ . Como a função  $\ln(\cdot)$  é estritamente crescente concluímos que  $y_0 \in I = (\ln a, \ln b)$ . Donde segue  $\ln^{-1}(I) \subset (a, b)$  ♣

**Definição.** Indicamos por  $e$  o único número real tal que

$$\boxed{\ln e = 1.}$$

**Definição.** A função exponencial real  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  é a inversa da função logaritmo. Isto é,

$$\boxed{\exp(x) = \ln^{-1}(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

**Teorema.** A função exponencial real é uma bijeção crescente de  $\mathbb{R}$  sobre  $(0, +\infty)$ , com as seguintes propriedades.

- (a) Infinitamente diferenciável e  $\exp'(x) = \exp(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ , para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- (c) Se  $r \in \mathbb{Q}$  então,  $\exp(r) = e^r$ .

**Prova.**

(a) Fixemos  $x \in \mathbb{R}$ . Consideremos o quociente de Newton

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0.$$

Sejam  $y = \exp(x)$  e  $k = \exp(x+h) - \exp(x)$ . Notemos que  $k \neq 0$ , pois a função exponencial é bijetora. Evidentemente,  $y \neq 0$ . Temos também  $x = \ln y$ ,  $\exp(x+h) = y+k$ ,  $x+h = \ln(y+k)$  e  $h = \ln(y+k) - \ln(y)$ . Logo,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{k}{\ln(y+k) - \ln(y)} = \frac{1}{\frac{\ln(y+k) - \ln(y)}{k}}.$$

Se  $h \rightarrow 0$ , então  $k \rightarrow 0$ . Ainda,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln(y+k) - \ln(y)}{k} = \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = y = \exp(x) \quad \text{e} \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

(b) Segue das identidades

$$\ln[\exp(x+y)] = x+y \quad \text{e} \quad \ln[\exp(x)\exp(y)] = \ln[\exp(x)] + \ln[\exp(y)] = x+y.$$

(c) Segue das identidades

$$\ln e^r = r \ln(e) = r \cdot 1 = r \quad \text{e} \quad \ln \exp(r) = r \clubsuit$$

Devido à propriedade  $\exp(r) = e^r$ , para todo racional  $r$ , e à continuidade da função  $\exp(x)$ , introduzimos a seguinte **notação para a função exponencial**,

$$\boxed{\exp(x) = e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.}$$

**Definição.** Dados  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$ , e  $x \in \mathbb{R}$ , pomos

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a}}.$$

**Proposição.** *Seja  $x$  um número real arbitrário. Temos,*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

**Prova.**

Consideremos a função  $f(x) = \exp(x)$ , um natural  $n \in \mathbb{N}$  e um ponto  $x \in \mathbb{R}$ . Pela fórmula de Taylor<sup>2</sup>, com resto de Lagrange, existe um ponto  $\bar{x}$  entre 0 e  $x$  tal que

$$e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1} .$$

Podemos supor que  $x \in [-R, R]$ , com  $R > 0$  e fixo. Neste caso, temos

$$\bar{x} \in [-R, R], \text{ com } f^{(j)}(x) = e^x, f^{(j)}(0) = 1, f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}} \text{ e}$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1} \right| \leq e^{\bar{x}} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Para a  $n$ -ésima soma parcial

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

obtemos

$$|e^x - S_n(x)| \leq e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } |x| \leq R.$$

Nestas condições (i.e., para  $x \in [-R, R]$ ), vale (cheque)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Donde segue que  $S_n(x)$  converge a  $\exp(x)$ . Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = e^x.$$

[Adendo. Para quem está familiarizado com convergência uniforme. A sequência  $S_n(x)$  converge uniformemente em  $[-R, R]$  pois  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R^n}{n!} = 0$ . ♣

---

<sup>2</sup>O inglês B. Taylor (1685-1731) a publicou em 1715. Porém, já era conhecida pelo escocês J. Gregory (1638-1675) e, na Índia, antes de 1550.

**Teorema.** *O número e é irracional e*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

**Prova.**

Pela Proposição anterior, no ponto  $x = 1$ , basta mostrarmos que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e, \text{ se } x \rightarrow +\infty.$$

Como  $\ln'(y) = 1/y$ , temos  $1 = \ln'(1)$  e portanto, pela definição de derivada,

$$1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y) - \ln 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Assim,

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^1 = e.$$

Substituindo, nesta última identidade, o valor  $y = 1/x$ , encontramos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Quanto à irracionalidade de  $e$ , notemos que se

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

então,

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n n!}. \end{aligned}$$

Supondo  $e$  racional, escrevendo

$$e = \frac{p}{q}, \text{ com } p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} \text{ e } \text{mdc}(p, q) = 1, \text{ segue } 0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q},$$

com o número  $q!e$  e o número

$$q!s_q = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

inteiros. Logo,  $q!(e - s_q)$  é um inteiro entre 0 e  $1 \frac{1}{q}$

Verificando que  $0 < e - s_7 < 10^{-4}$ , obtemos as primeiras três casas decimais de

$$e = 2,718\dots$$

A função  $e^x$  tem limite 0 em  $-\infty$  e limite  $+\infty$  em  $+\infty$ , derivadas primeira e segunda estritamente positivas, é estritamente crescente e com concavidade voltada para cima. Os gráficos de  $e^x$  e  $\ln x$ , funções inversas uma da outra, são simétricos em relação à bissetriz principal (vide figura abaixo).

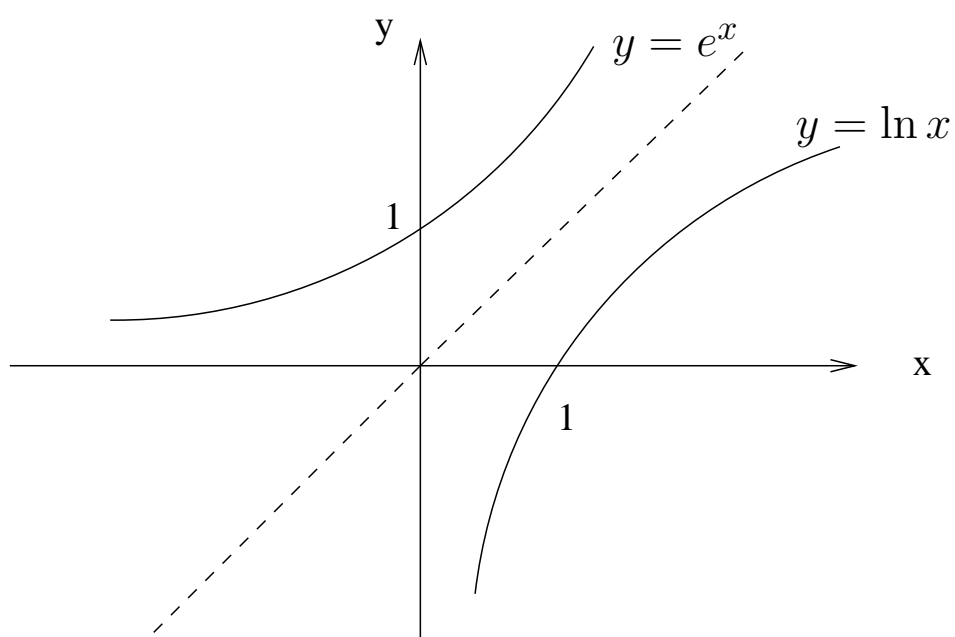


Figura 7: Gráficos de  $y = e^x$  e  $y = \ln x$

### Comentários sobre $e$ e $\pi$ .

(Extraído, na maior parte, de Spivak “Calculus”).

Os números  $e$  e  $\pi$  são mais sofisticados que o outrora desafiador irracional  $\sqrt{2}$ , o qual satisfaz  $x^2 - 2 = 0$ . São chamados **algébricos** os números  $x$  que satisfazem uma equação polinomial da forma,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n, \text{ com } a_0 \neq 0.$$

Por exemplo,

$$\sqrt[7]{4 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{11}}$$

é algébrico mas não provaremos este fato aqui. Números não algébricos são chamados **transcendentes** e  $e$  e  $\pi$  são dois exemplos. O número  $\pi$  surgiu na antiguidade, como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O número  $e$  é “recente”, sendo o escocês John Neper (1550-1617) e Jacques Bernoulli, citado na introdução deste capítulo, dois dos principais nomes ligados a sua origem.

Neper objetivava simplificar operações com grandes números. Para manter próximos os termos numa progressão de potências inteiras de um número dado é mister toma-lo próximo de 1. Neper escolheu  $1 - 10^{-7} = 0,9999999$  e, para simplificar, multiplicou cada potência por  $10^7$ . Então, se

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L,$$

o número  $L$  é o **logaritmo de Neper** de  $N$ . Dividindo seus números e logaritmos por  $10^7$  teríamos algo próximo de um sistema de logaritmos de base  $1/e$  pois  $(1 - 1/10^7)^{10^7}$  é próximo de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Desde a Grécia antiga, procurou-se obter a “quadratura do círculo” por meio de régua e compasso. Isto é, a partir de um círculo de raio 1 contruir um quadrado de igual área. Para tal é necessário um segmento de comprimento  $\sqrt{\pi}$ . O comprimento de um segmento construtível a partir da unidade com régua e compasso (**número construtível**), pode ser obtido a partir das operações elementares,  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  e  $\div$  e, ainda,  $\sqrt{\cdot}$  e é portanto um número algébrico.



Em 1882 o matemático alemão C. Lindemann (1852-1939) mostrou que  $\pi$  é transcendente e conseqüentemente não construtível e irracional.

A prova acima de que  $e$  é irracional é bem mais simples que a “elementar” da irracionalidade de  $\pi$  [vide Spivak, “Calculus”]. Existe uma prova simples de que  $\pi$  é transcendente, porém tal prova requer métodos avançados em álgebra (Teoria de Galois <sup>3</sup>). Isto não deve causar surpresa pois é comum que argumentos “elementares” sejam mais difíceis que os argumentos “avançados”.

Em 1844 o matemático francês J. Liouville (1809-1882) mostrou que  $e$  não é construtível e em 1873 seu compatriota C. Hermite (1822-1901) demonstrou a transcendência de  $e$ , para a qual existe uma prova elementar, baseada numa idéia do germânico D. Hilbert (1862-1943) [vide Spivak, “Calculus”].

Cabe salientar que as provas da transcendência de  $e$  e  $\pi$  são praticamente as mesmas o que surpreende visto que tais números tem origens bem distintas. Obviamente tal fato é curioso afinal, qual relação pode haver entre  $e$  e  $\pi$ ? A resposta a esta questão surge com a apresentação da função exponencial complexa e a fórmula de Euler (em cursos de uma variável complexa).

As notações  $e$  e  $\pi$  (e também  $i$  para  $\sqrt{-1}$ ) devem-se a Euler. Provavelmente a letra  $e$  tenha sido adotada por ser a primeira letra de exponencial.

---

<sup>3</sup>Évariste Galois (1811-1832), jovem francês, escreveu parte de suas descobertas na noite anterior à sua morte em duelo por motivo passional. Liouville as publicou em 1846.

## 18. Desigualdades de Cauchy-Schwarz.

**Lema. A Desigualdade Clássica de Cauchy-Schwarz.** (Cauchy, 1821).

Sejam  $(a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$  duas  $n$ -uplas de números reais. Então, segue

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

**Prova.**

Utilizemos a desigualdade  $xy \leq (x^2 + y^2)/2$  (cheque). Temos então,

$$\begin{aligned} (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 &= \left( \sum_{i=1}^n a_ib_i \right) \left( \sum_{j=1}^n a_jb_j \right) = \sum_{i,j} a_ib_ja_jb_i \\ &\leq \sum_{i,j} \frac{a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2}{2} \\ &= \sum_{i,j} a_i^2b_j^2 \\ &= (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \clubsuit \end{aligned}$$

A seguir, vejamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais.

**Teorema. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz.** (Bunyakovski 1859 para integrais simples, Schwarz 1885 para integrais duplas). Consideremos duas funções  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis. Então segue

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

**Prova.** Já vimos que  $f^2$ ,  $g^2$  e  $fg$  são integráveis.

Seja  $\sum f(c_i)g(c_i)\Delta x_i$  uma arbitrária soma de Riemann de  $f$ . A desigualdade clássica de Cauchy-Schwarz garante

$$\begin{aligned} \left| \sum f(c_i)g(c_i)\Delta x_i \right| &\leq \sum \left| f(c_i)\sqrt{\Delta x_i} \right| \left| g(c_i)\sqrt{\Delta x_i} \right| \\ &\leq \sqrt{\sum f^2(c_i)\Delta x_i} \sqrt{\sum g^2(c_i)\Delta x_i}. \end{aligned}$$

Imponhamos que a norma da partição  $\{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$  tende a zero. Então, no limite encontramos

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \clubsuit$$

### 19. Primeiro TVM para Integrais, Generalizado. (Versão fina.)

**Motivação.** Suponhamos que a média final  $M$  em um curso se dê pela média ponderada das notas  $n_1, \dots, n_k$ , com respectivos pesos  $p_1, \dots, p_k$ . Então,

$$M = \frac{\sum_{j=1}^k p_j n_j}{\sum_{j=1}^k p_j}.$$

#### **Teorema. Primeiro TVM para Integrais, Generalizado. (Versão fina.)**

Consideremos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Seja  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável com uma quantidade finita de descontinuidades e, ainda,  $p \geq 0$  e

$$\int_a^b p(x) dx > 0.$$

Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$(**) \quad \int_a^b f(x)p(x) dx = f(c) \int_a^b p(x) dx.$$

**Adendo.** A hipótese “com uma quantidade finita de descontinuidades” é supérflua, se empregarmos uma teoria de integração mais sofisticada (Integral de Lebesgue).

#### **Prova.**

Sejam  $m = f(x_1)$  o mínimo de  $f$  e  $M = f(x_2)$  o máximo de  $f$ . Se  $x \in [a, b]$ , temos  $m \leq f(x) \leq M$  e ainda  $mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$ . Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)p(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}.$$

◇ **Caso 1.** Se  $m < \gamma < M$ , pelo teorema do valor intermediário existe  $c$  no intervalo aberto de extremidades  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $f(c) = \gamma$ .

◇ **Caso 2.** Se  $\gamma = M$  então segue

$$\int_a^b [M - f(x)]p(x) dx = 0.$$

Donde, pela desigualdade  $[M - f(x)]p(x) \geq 0$  e o teorema de positividade, obtemos  $[M - f(x)]p(x) = 0$  em todo ponto de continuidade de  $p$ .

A função  $p$  não se anula em algum intervalo aberto  $J$  (caso contrário,  $p$  admite uma sequência de somas de Riemann que converge a  $0$  - cheque).

Logo,  $f$  é constante e igual a  $M$  em  $J$ . Todo ponto  $c \in J$  satisfaz (\*\*).

◇ **Caso 3.** Se  $\gamma = m$ , basta aplicar o Caso 2 ao par de funções  $-f$  e  $p$  ♣

**Interpretação aritmética para o “primeiro TVM para integrais, generalizado.”** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e uma função (peso) integrável  $p : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  com uma quantidade finita de descontinuidades e tal que

$$\int_a^b p(x)dx > 0.$$

Então, a função  $f$ , ponderada pelo peso  $p$ , assume em algum ponto  $c$  a sua média ponderada. Isto é, temos

$$\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} = f(c).$$

### Comentário.

- ◇ O primeiro teorema do valor médio para integrais, generalizado, nos permite tanto demonstrar o primeiro TVM para integrais assim como fundamentar a interpretação aritmética para o primeiro TVM para integrais.

Vejamos. Dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, consideremos a função integrável e estritamente positiva

$$p(x) = 1 \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Evidentemente, a média de  $f$  ponderada pela função constante  $p = 1$  é apenas e tão somente a **média aritmética de  $f$** .

Pelo primeiro TVM para integrais, generalizado, segue que existe um ponto  $c$  tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b 1 \cdot f(x)dx}{\int_a^b 1dx}.$$

Donde então segue a identidade

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \clubsuit$$

## 20. Funções Degrau (Escada) e Degrau Suave, e Aproximação.



Figura 8: *Walk like a step function.*

**Lema.** Consideremos a função escada (com dois degraus e crescente)

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } 0 < x. \end{cases}$$

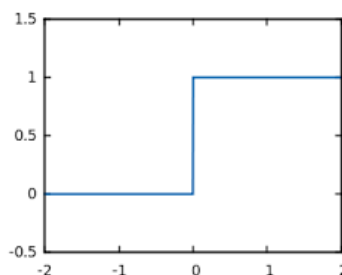


Figura 9: Esboço da função escada  $E = E(x)$  sobre  $[-2, 2]$ .

Definamos então a função escada suave (ou realística)

$$e(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{se } 1 \leq x. \end{cases}$$

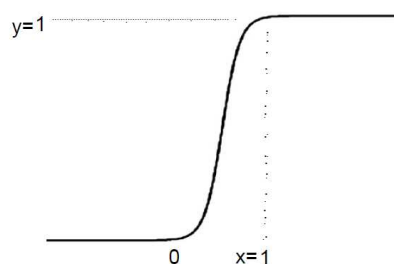


Figura 10: Gráfico da escada suave  $e = e(x)$ .

A função  $e(x)$  é de classe  $C^1$ , crescente e  $0 \leq e(x) \leq E(x)$  na reta. Ainda,

$$\int_{-2}^2 |E(x) - e(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

**Prova.**

◇ É trivial ver que a função  $e = e(x)$  está bem definida e é contínua.

◇ A função  $e$  é crescente. Dado  $x$  intervalo aberto  $(0, 1)$ , segue

$$e'(x) = 6x(1 - x) > 0.$$

Concluimos então que  $e = e(x)$  é crescente em  $[-2, 2]$ .

◇ A função  $e = e(x)$  é de classe  $C^1$ . É trivial ver que  $e'_+(0) = 0$  e  $e'_-(1) = 0$ . É óbvio que  $e'_-(0) = 0$  e  $e'_+(1) = 0$ . Logo, a função  $e'(x)$  é contínua.

◇ A função  $E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável. De fato, dado  $\epsilon > 0$  e uma partição  $\{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$  com norma menor que  $\epsilon$ , temos

$$\sum (M_i - m_i)\Delta x_i = (1 - 0)\Delta x_1 + 0\Delta x_2 + \dots + 0\Delta x_n = \Delta x_1 < \epsilon$$

Onde  $m_i$  e  $M_i$  são o inf e o sup de  $E$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

◇ É óbvio que  $E : [-2, 0] \cup [0, 1] \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável. É trivial ver que

$$\int_{-2}^2 E(x)dx - \int_{-2}^2 e(x)dx = 2 - \int_0^1 (3x^2 - 2x^3)dx - 1 = \frac{1}{2} \clubsuit$$

**Corolário 1.** Seja  $0 < \epsilon < 1$ . A função

$$\phi_\epsilon(s) = e\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$$

é uma escada suave (de classe  $C^1$ ) crescente, nula para todo  $s \leq 0$  e identicamente 1 para todo  $s \geq \epsilon$ . Ainda mais, satisfaz  $0 \leq \phi_\epsilon \leq E \leq 1$  e

$$\int_2^2 |E(x) - \phi_\epsilon(x)|dx = \frac{\epsilon}{2}.$$

**Prova.**

As cinco afirmações iniciais são evidentes. Para finalizar, temos

$$\int_{-2}^2 [E(s) - \phi_\epsilon(s)]ds = 2 - \left[ (2 - \epsilon) + \int_0^\epsilon e\left(\frac{s}{\epsilon}\right) dx \right] = \epsilon - \epsilon \int_0^1 e(x)dx = \frac{\epsilon}{2} \clubsuit$$

Dizemos que  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função escada (ou degrau)** se existe uma partição  $\{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$  tal que  $E = E(x)$  é constante em cada sub-intervalo aberto  $(x_{i-1}, x_i)$ . Isto é, dado  $i = 1, \dots, n$  existe um real  $c_i$  satisfazendo

$$E(x) = c_i \text{ para todo } x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Os valores  $E(x_0), \dots, E(x_n)$  são arbitrários.

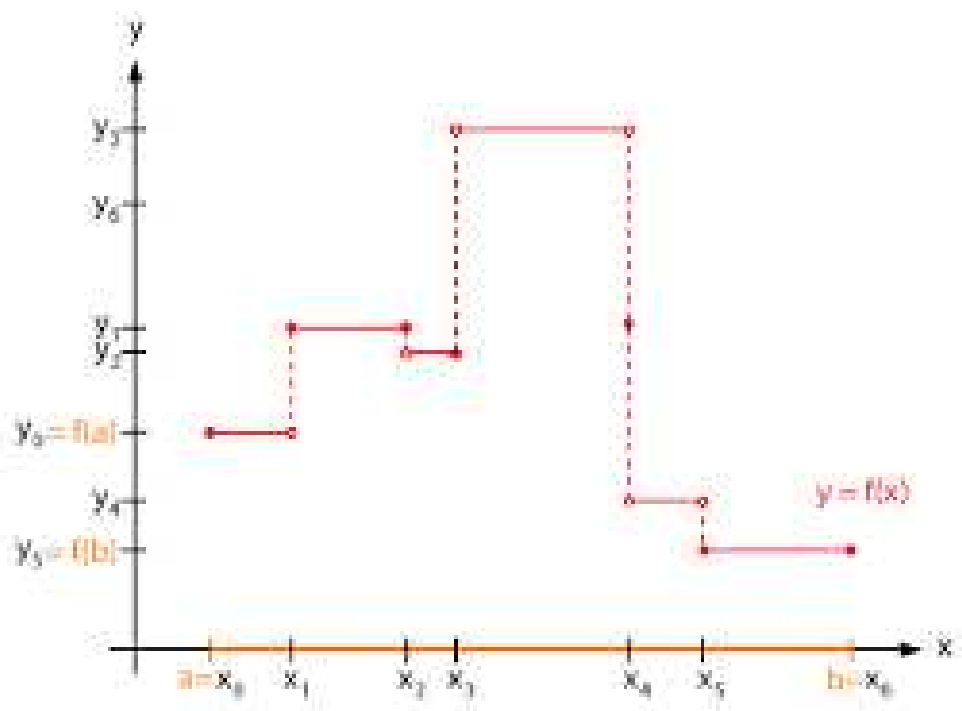


Figura 11: Exemplo de uma função escada  $y = f(x)$ .

**Corolário 2.** Seja  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escada arbitrária. Então, dado  $\epsilon > 0$  existe uma função escada  $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suave (i.e., de classe  $C^1$ ) satisfazendo

$$\int_a^b |E(x) - e(x)| dx < \epsilon.$$

Ainda, mantida a notação acima na definição de função escada, podemos escolher a função  $e = e(x)$  tal que temos

$$\text{Imagem}(e) = [\min\{c_1, \dots, c_n\}, \max\{c_1, \dots, c_n\}].$$

Ainda mais, se  $E$  é crescente então podemos supor que  $e$  é crescente. [Vale afirmação análoga para  $E$  decrescente.]

**Prova.**

- ◇ Seja  $E_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $E_i(x) = c_i$  se  $x \in [x_{i-1}, x_i)$  e  $E_i(x_i) = c_{i+1}$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ , com  $E_n(x_n) = c_n$ . Segue então, pela prova do lema (quarta afirmação), que cada  $E_i$  é integrável (logo,  $E$  também) e que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |E(x) - E_i(x)| dx = 0.$$

- ◇ Pelo corolário anterior existe  $e_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona suave e tal que  $e_i(x_{i-1}) = c_i$ ,  $e_i(x_i) = c_{i+1}$  e  $e_i'(x_{i-1}) = e_i'(x_i) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  (cheque), com  $e_n(x) = c_n$  para todo  $x \in [x_{n-1}, x_n]$ , e satisfazendo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |E_i(x) - e_i(x)| dx < \frac{\epsilon}{n}, \text{ se } i = 1, \dots, n.$$

Dado  $i = 1, \dots, n-1$ , a imagem da função  $e_i$  é  $[c_{i-1}, c_i]$  ou  $[c_i, c_{i-1}]$ . A imagem de  $e_n$  é apenas  $\{c_n\}$ .

- ◇ Definamos  $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $e(x) = e_i(x)$  se  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . A função  $e = e(x)$  está bem definida e é de classe  $C^1$  (cheque).

A imagem de  $e$  é exatamente o intervalo  $[\min\{c_1, \dots, c_n\}, \max\{c_1, \dots, c_n\}]$ .

- ◇ A função  $\bar{E} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{E}(x) = E_i(x)$  se  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ , está bem definida. Já vimos que cada  $E_i$  é integrável. Logo,  $\bar{E}$  também. Ainda mais,

$$\int_a^b |\bar{E}(x) - e(x)| dx = \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} |E_i(x) - e_i(x)| dx < \epsilon.$$

É claro que temos  $\bar{E}(x) = E(x)$  para quaisquer  $x \in (x_{i-1}, x_i)$  e  $i = 1, \dots, n$ . Logo, pela prova do lema (quarta afirmação) segue

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\bar{E}(x) - E(x)| dx = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Por fim, pelas duas últimas fórmulas em destaque segue

$$\int_a^b |e(x) - E(x)| dx \leq \int_a^b |e(x) - \bar{E}(x)| dx + \int_a^b |\bar{E}(x) - E(x)| dx < \epsilon + 0.$$

É evidente que se  $E$  é crescente/decrescente então  $e$  é crescente/decrescente ♣



Vejam como aproximar funções monótonas descontínuas. Os casos monótona crescente e monótona decrescente são análogos.

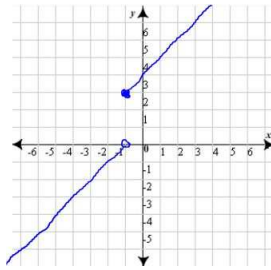


Figura 12: Exemplo de uma função crescente e descontínua (em um ponto).

**Corolário 3.** *Seja  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. Então, dado  $\epsilon > 0$  existe uma função escada suave (de classe  $C^1$ ) e crescente,  $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo*

$$\int_a^b |\varphi(x) - e(x)| dx < \epsilon \quad \text{e} \quad \text{Imagem}(e) = [\varphi(a), \varphi(b)].$$

**Prova.** Podemos supor  $\varphi$  não identicamente nula.

◇ Temos  $|\varphi(x)| \leq M = \max\{|\varphi(a)|, |\varphi(b)|\} \neq 0$  em todo  $x$  de  $[a, b]$ .

Já vimos que  $\varphi$  é integrável. Logo, fixado  $N \in \mathbb{N}$  grande o suficiente, para toda partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$  de norma  $|\mathcal{P}| < (NM)^{-1}$  temos

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx - [\varphi(x_0)\Delta x_1 + \dots + \varphi(x_{n-2})\Delta x_{n-1} + \varphi(x_n)\Delta x_n] \right| < \frac{1}{N}.$$

Definamos a função escada  $E$  por  $E(x) = \varphi(x_{i-1})$ , para cada  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  e  $i = 1, \dots, n-1$ , e por  $E(x) = \varphi(x_n) = \varphi(b)$  para cada  $x \in [x_{n-1}, b]$ .

Donde segue  $E(a) = \varphi(a)$  e  $E(x) \leq \varphi(x)$  no sub-intervalo  $[a, x_{n-1}]$ . É claro que a função  $E$  é crescente no intervalo  $[a, b]$ .

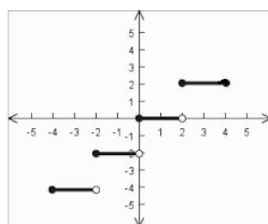


Figura 13: Exemplo para a função escada  $E$ , com  $[a, b] = [-4, 4]$ .

Então, pela prova do lema (quarta afirmação) e a aditividade da integral sobre intervalos, segue

$$\varphi(x_0)\Delta x_1 + \dots + \varphi(x_{n-2})\Delta x_{n-1} + \varphi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} E(x)dx = \int_a^b E(x)dx.$$

Encontramos então

$$\left| \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b E(x)dx \right| \leq \frac{1}{N}.$$

Ao longo do intervalo  $[a, b]$  temos  $|E| \leq M$  e  $|\varphi| \leq M$ . Ao longo do sub-intervalo  $[a, x_{n-1}]$  temos  $E \leq \varphi$  e então  $|\varphi - E| = \varphi - E$ . Devido a tais observações, à desigualdade destacada imediatamente acima e à hipótese sobre a norma da partição, encontramos

$$\begin{aligned} \int_a^b |\varphi(x) - E(x)|dx &= \int_a^b (\varphi - E)dx + \int_{x_{n-1}}^b [|\varphi - E| - (\varphi - E)]dx \\ &\leq \frac{1}{N} + 4M\Delta x_n \\ &\leq \frac{1}{N} + \frac{4}{N}. \end{aligned}$$

O Lema, o Corolário 1 e o Corolário 2, todos nesta seção, garantem existir uma função degrau  $e$  definida em  $[a, b]$  e tal que

$$\begin{cases} e = e(x) \text{ é crescente e de classe } C^1, \\ e(a) = E(a) = \varphi(a) \text{ e } e(b) = E(b) = \varphi(b), \end{cases}$$

e, ainda,

$$\int_a^b |E(x) - e(x)|dx < \frac{1}{N}.$$

Por fim, a desigualdade triangular para números mostra

$$\int_a^b |\varphi(x) - e(x)|dx \leq \int_a^b |\varphi - E|dx + \int_a^b |E - e|dx \leq \frac{5}{N} + \frac{1}{N}.$$

Isto mostra que basta escolhermos um natural  $N$  tal que

$$\frac{6}{N} < \epsilon \clubsuit$$

## 21. Segundo TVM para Integrais.

**Teorema (Segundo TVM para Integrais).** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona. Então, existe  $\lambda \in [a, b]$  tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a) \int_a^\lambda f(x)dx + p(b) \int_\lambda^b f(x)dx.$$

**Prova.** Podemos supor  $p = p(x)$  não identicamente nula.

- ◇ Já vimos que toda função monótona e definida em  $[a, b]$  é integrável e que o produto de integráveis é integrável. Logo,  $fp$  é integrável.
- ◇ Trocando o “peso”  $p$  por  $-p$ , se necessário, podemos supor  $p$  crescente.
- ◇ Podemos supor  $p(b) = 0$ , sem perda de generalidade. Pois, provado este caso particular, dada uma  $p$  qualquer e crescente temos que existe  $\lambda$  tal que

$$\int_a^b f(x)[p(x) - p(b)]dx = [p(a) - p(b)] \int_a^\lambda f(x)dx + 0.$$

Donde segue

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a) \int_a^\lambda f(x)dx + p(b) \int_\lambda^b f(x)dx.$$

- ◇ A seguir, seja  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente, com  $p(b) = 0$ . Logo,  $p(a) < 0$ .
- ◇ O caso com  $p$  derivável e com derivada contínua (i.e.,  $p$  de classe  $C^1$ ). Seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Integração por partes nos conduz a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)p(x)dx &= F(x)p(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)p'(x)dx \\ &= (0 - 0) - \int_a^b F(x)p'(x)dx. \end{aligned}$$

Pelo primeiro TVM para integrais (generalizado) obtemos

$$\int_a^b F(x)p'(x)dx = F(\lambda) \int_a^\lambda p'(x)dx = -p(a) \int_a^\lambda f(x)dx, \text{ para algum } \lambda \in (a, b).$$

Donde segue, encerrando este caso,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a) \int_a^\lambda f(x)dx, \text{ para algum } \lambda \in (a, b).$$

◇ O caso geral (i.e.,  $p$  crescente e  $p(b) = 0$ ). Seja  $N \in \mathbb{N}$ .

O terceiro corolário na seção *Funções degrau (escada) e degrau suave*, e aproximação garante existir uma função degrau de classe  $C^1$  e crescente  $e_N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_a^b |p(x) - e_N(x)| dx < \frac{1}{N}, \text{ com } e_N(a) = p(a), \quad e_N(b) = 0 = p(b).$$

Escrevamos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f[p - e_N]dx + \int_a^b fe_N dx.$$

Seja  $M$  uma constante satisfazendo  $|f(x)| \leq M$  em todo ponto  $x$  de  $[a, b]$ .

A desigualdade triangular para integrais mostra

$$\left| \int_a^b f(p - e_N) dx \right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Pelo caso já provado [ $e_N$  é monótona, de classe  $C^1$  e  $e_N(b) = 0$ ], obtemos

$$\int_a^b fe_N dx = e_N(a) \int_a^{\lambda_N} fe_N dx, \text{ para algum } \lambda_N \in (a, b).$$

Como  $e_N(a) = p(a)$ , encontramos

$$\int_a^b fp dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} p(a) \int_a^{\lambda_N} fe_N dx.$$

A sequência  $\lambda_N$  admite subsequência convergente a algum valor  $\lambda \in [a, b]$ .

Logo, podemos supor sem perda de generalidade (**cheque**) que

$$\lambda_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda \in [a, b].$$

A desigualdade triangular para integrais mostra

$$\left| \int_a^{\lambda_N} f(p - e_N) dx \right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

A continuidade da integral mostra que

$$\int_a^{\lambda_N} fp dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^{\lambda} fp dx.$$

Logo,

$$\int_a^{\lambda_N} fe_N dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^{\lambda} fp dx.$$

Por fim, concluímos que

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} p(a) \int_a^{\lambda_N} f(x)e_N(x)dx = p(a) \int_a^{\lambda} f(x)p(x)dx \clubsuit$$

## 22. O TVM de Bonnet.

**Teorema (O TVM de Bonnet - 1849).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e uma função  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  estritamente positiva, decrescente e contínua. Então, temos*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a) \int_a^c f(x)dx, \text{ para algum } c \in [a, b].$$

**Prova.**

- ◇ Podemos supor, sem perda de generalidade,  $p$  não constante.
- ◇ O caso  $p$  derivável, com derivada  $p'$  contínua. Logo,  $p' \leq 0$ . Seja

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Integrando por partes (e utilizando que  $f$  é contínua) encontramos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)p(b) - F(a)p(a) - \int_a^b F(x)p'(x)dx \quad \text{e} \quad F(a) = 0.$$

Pelo TVM-generalizado para integrais, existe  $c_1 \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b F(x)p'(x)dx = F(c_1)[p(b) - p(a)].$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)p(b) + F(c_1)[p(a) - p(b)].$$

Donde segue

$$\frac{1}{p(a)} \int_a^b f(x)p(x)dx = F(b) \frac{p(b)}{p(a)} + F(c_1) \left[ 1 - \frac{p(b)}{p(a)} \right], \quad \text{com} \quad 0 < \frac{p(b)}{p(a)} < 1.$$

Assim, o número no lado esquerdo da identidade acima está entre  $F(b)$  e  $F(c_1)$ . Pelo teorema do valor intermediário, existe  $c$  entre  $c_1$  e  $b$  tal que

$$\frac{1}{p(a)} \int_a^b f(x)p(x)dx = F(c), \quad \text{onde} \quad F(c) = \int_a^c f(x)dx.$$

◇ O caso geral, onde  $p = p(x) > 0$  é decrescente e contínua.

Seja  $N \in \mathbb{N}$ . Pelo teorema de Weierstrass, a função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada. Seja  $M > 0$  tal que temos  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x$  de  $[a, b]$ .

O terceiro corolário na seção *Funções degrau (escada) e degrau suave*, e *aproximação* garante existir uma função escada suave (de classe  $C^1$ ) decrescente e estritamente positiva  $e_N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_a^b |p(x) - e_N(x)| dx < \frac{1}{N}, \quad \text{com } e_N(a) = p(a) \text{ e } e_N(b) = p(b).$$

Escrevamos

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \int_a^b f(p - e_N)dx + \int_a^b f e_N dx.$$

Pela desigualdade triangular para integrais segue

$$\left| \int_a^b f(p - e_N)dx \right| \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Pelo primeiro caso temos

$$\int_a^b f(x)e_N(x)dx = e_N(a) \int_a^{\lambda_N} f(x)dx.$$

Já vimos que  $e_N(a) = p(a)$ . A sequência  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  está contida em  $[a, b]$  e tem portanto uma subsequência convergente a algum  $\lambda \in [a, b]$ . Logo, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\lambda_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \lambda \in [a, b].$$

Então, pelo continuidade da integral segue

$$\int_a^{\lambda_N} f(x)dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^{\lambda} f(x)dx.$$

Concluimos então que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^b f(p - e_N)dx + \int_a^b f e_N dx \right] = p(a) \int_a^{\lambda} f(x)dx \clubsuit$$

### 23. Lema de Riemann-Lebesgue.

O lema de Riemann-Lebesgue é um resultado sobre *integrais oscilatórias* e é muito importante em Teoria dos Sinais e no estudo das séries de Fourier, Transformada de Fourier e em Análise Harmônica.

A grosso modo, o lema de Riemann-Lebesgue afirma que a integral de uma função que oscila bastante, vide gráfico abaixo, é pequena. Dito de outra forma, o valor da integral tende a 0 se a frequência  $\omega$  tende ao infinito.

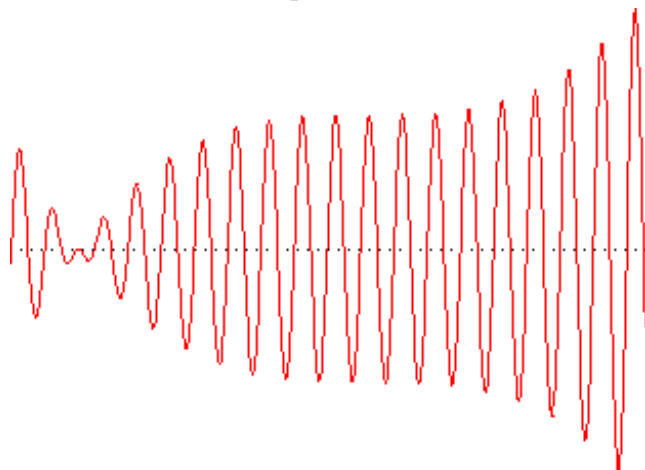


Figura 14: Ilustração ao Lema de Riemann-Lebesgue.

**Exemplo (Motivação).** Fixemos um intervalo  $[a, b]$  na reta. Então, temos

$$\int_a^b \sin(\omega x) dx \longrightarrow 0 \text{ se } |\omega| \rightarrow +\infty.$$

**Prova.**

Segue de

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_a^b \sin(\omega x) dx = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left. -\frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right|_a^b = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos(a\omega) - \cos(b\omega)}{\omega} = 0 \clubsuit$$

Generalizemos este exemplo.

Dizemos que  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função escada (ou degrau)** se existe uma partição  $\{a_0 = a < \dots < a_n = b\}$  tal que  $E = E(x)$  é constante em cada sub-intervalo aberto  $(a_{i-1}, a_i)$ . Isto é, dado  $i = 1, \dots, n$  existe um real  $c_i$  satisfazendo  $E(x) = c_i$  para todo  $x \in (a_{i-1}, a_i)$ . Os valores  $E(a_0), \dots, E(a_n)$  são arbitrários.

**Exemplo.** Seja  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escada. Então,

$$\int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx \rightarrow 0 \text{ se } |\omega| \rightarrow +\infty.$$

**Prova.**

Caso 1. Suponhamos  $E(x) = c$  em  $(a, b)$ , com  $c$  uma constante real. É trivial ver que a função  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável (cheque) e que

$$\int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx = c \int_a^b \sin(\omega x) dx.$$

Pelo exemplo anterior segue então que

$$\int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx \rightarrow 0 \text{ se } |\omega| \rightarrow +\infty.$$

Caso 2. Seja  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escada arbitrária. Este caso segue trivialmente do caso 1 (cheque) ♣

**Teorema (Lema de Riemann-Lebesgue).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável. Então,

$$\int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx \rightarrow 0 \text{ se } |\omega| \rightarrow \infty.$$

**Prova.**

Dado  $\epsilon > 0$ , existe uma partição  $\{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$  tal que

$$0 \leq \sum M_i \Delta x_i - \int_a^b f(x) dx < \epsilon,$$

onde  $M_i$  é o sup de  $f$  no sub-intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Seja  $E(x) = M_i$ , para quaisquer  $x \in (x_{i-1}, x_i)$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ . É trivial ver que

$$\int_a^b E(x) dx = \sum M_i \Delta x_i.$$

Pelo exemplo acima, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que temos

$$\left| \int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx \right| < \epsilon \text{ para todo } |\omega| > N.$$

Concluimos esta prova observando que para todo  $|\omega| > N$  temos

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx \right| &\leq \left| \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx - \int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx \right| + \left| \int_a^b E(x) \sin(\omega x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |E(x) - f(x)| dx + \epsilon = \int_a^b [E(x) - f(x)] dx + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon \clubsuit \end{aligned}$$



## 24. Continuidade Uniforme. Integrabilidade das Funções Contínuas.

Nesta seção consideramos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.

Pelo Teorema de Weierstrass  $f$  assume valor mínimo e valor máximo, ambos em  $[a, b]$ , e a função  $f$  é limitada. Sendo assim, podemos trocar os conceitos de ínfimo e supremo nas definições das somas inferior e superior de Darboux pelos conceitos de mínimo e máximo, respectivamente.

Com tal troca, dada  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , uma partição de  $[a, b]$ , a soma inferior de Darboux e a soma superior de Darboux de  $f$  e em relação à partição  $\mathcal{P}$  são, respectivamente,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ e}$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

**Notação.** Dado  $A \subset [a, b]$ , definimos

$$\min_A f = \min\{f(x) : x \in A\} \text{ e } \max_A f = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

**Observação 1.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se  $I$  e  $J$  são subintervalos de  $[a, b]$  e  $I \subset J$ , então

$$\min_J f \leq \min_I f \leq \max_I f \leq \max_J f.$$

(b) Se  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  são partições de  $[a, b]$  então, ordenando  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  temos que  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$  é também uma partição de  $[a, b]$ .

(c) Se  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  são partições de  $[a, b]$  então

$$s(f, \mathcal{P}_1) \leq s(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq S(f, \mathcal{P}_2).$$

(d) Se  $\mathcal{P}$  é uma partição de  $[a, b]$  e  $\mathcal{E}$  é uma escolha qualquer subordinada à partição  $\mathcal{P}$ , então

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq S(f, \mathcal{P}).$$

**Prova.** Basta, na Observação 1, na seção Somas de Darboux e o teorema de Darboux e Du Bois-Reymond, trocar inf por min e trocar sup por max. ♣

No que segue, utilizando o *método de exaustão* - precursor do cálculo integral - que remonta a Eudoxu e Arquimedes, mostramos que existem o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que  $f$  é integrável.

**Proposição.** *Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  então existem*

$$\begin{cases} \alpha = \sup \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \\ e \\ \beta = \inf \{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} \end{cases}$$

e, ainda, temos  $\alpha \leq \beta$ .

**Prova.**

Já provamos uma proposição mais forte, para funções limitadas, na seção *Somas de Darboux e o teorema de Darboux - Du Bois-Reymond*. Observemos que o teorema de Weierstrass estabelece que toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada ♣

**Proposição.** *Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0 \in X$  e  $(x_n)$  é uma sequência contida em  $X$  e convergente a  $x_0 \in X$ , então a sequência  $(f(x_n))$  converge a  $f(x_0)$ .*

**Prova.**

Dado um arbitrário  $\epsilon > 0$ , por hipótese existe algum  $\delta > 0$  garantindo que temos  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  se  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in X$ . Como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que temos  $|x_n - x_0| < \delta$  se  $n \geq n_0$ . Sendo assim, temos

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \clubsuit$$

**Definição.** *Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $X \subset \mathbb{R}$ , é uniformemente contínua se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  satisfazendo a condição abaixo.*

*Se  $|x - y| < \delta$ , onde  $x \in X$  e  $y \in X$ , então  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .*

**Teorema (Heine, 1872).**<sup>4</sup> Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  é uniformemente contínua.

**Prova.** Por contradição.

Suponhamos que existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\delta = 1/n$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , existem  $x_n$  e  $y_n$  em  $[a, b]$  tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Sendo limitada,  $(x_n)$  admite subsequência convergente  $(x_{n_k})$  e reenumerando esta, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que  $(x_n)$  converge a  $x$ . Notemos que como temos  $a \leq x_n \leq b$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então segue  $x \in [a, b]$ . Ainda mais, como

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que a sequência  $(y_n)$  também converge a  $x$ . Concluimos então que

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \not\leq$$

**Teorema.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $f$  é integrável.

**Prova.**

Dado  $\epsilon > 0$ , como  $f$  é uniformemente contínua, existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$  uma partição com  $|\mathcal{P}| < \delta$ .

Sejam  $m_i$  e  $M_i$ , o inf e o sup de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , respectivamente.

Segue

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon.$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond,  $f$  é integrável ♣

---

<sup>4</sup>Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.

## 25. Integrabilidade de Funções com Conjunto Finito de Descontinuidades.

Consideremos uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com um número finito de descontinuidades. Particionemos  $[a, b]$  em uma quantidade finita de sub-intervalos tal que  $f$  é descontínua no máximo nos pontos extremos destes sub-intervalos.

Então, pelo que já provamos até aqui, a função  $f$  é integrável em  $[a, b]$  se e somente  $f$  é integrável em cada um destes sub-intervalos.

Em um ponto de descontinuidade  $p \in (a, b)$  podem existir os limites laterais à direita e à esquerda, e ao menos um destes limites assumir um valor distinto de  $f(p)$  (neste caso, a descontinuidade é dita de *primeira espécie* ou de *tipo salto*) ou pode não existir ao menos um dos limites laterais (neste caso, a descontinuidade é dita de *segunda espécie*).

A função abaixo tem descontinuidades de tipo salto em  $x = -2$  e em  $x = 3$ .

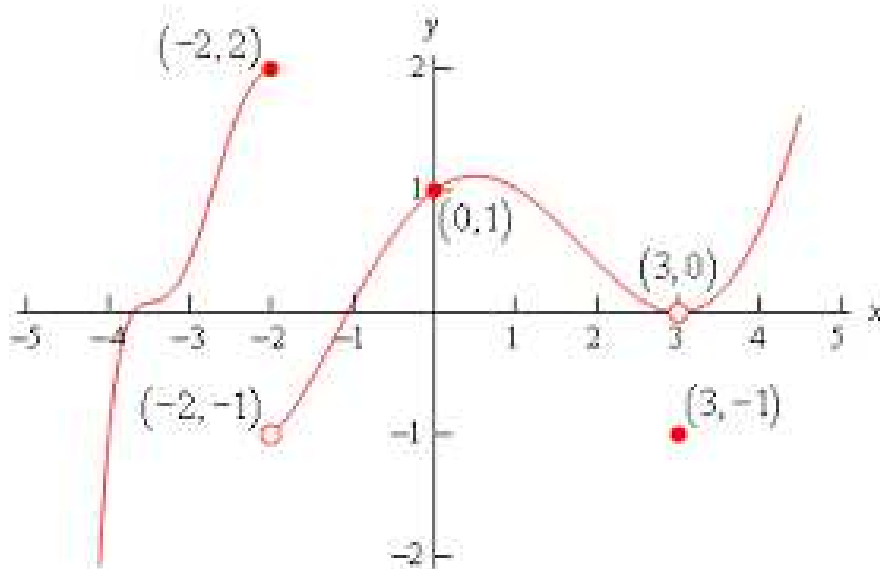


Figura 15: Duas descontinuidades de *tipo salto*.

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0,$$

tem descontinuidade de segunda espécie em  $x = 0$ , não importa o valor que se atribua a  $f(0)$ . Vide gráfico abaixo.

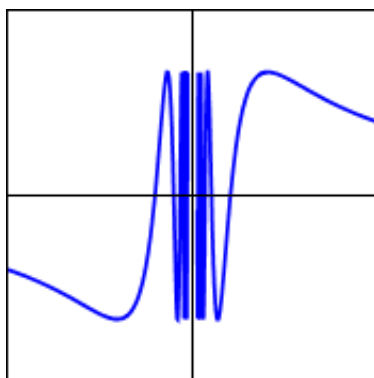


Figura 16: Não existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \sin \frac{1}{x}$ .

**Teorema.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e com um número finito de descontinuidades. Então,  $f$  é integrável.*

**Prova.**

Pelos comentários prévios, podemos supor  $f$  descontínua em  $x = a$  e  $x = b$ .

Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ .

Seja  $\epsilon > 0$ . Consideremos dois sub-intervalos disjuntos  $[a, \alpha]$  e  $[\beta, b]$ , onde

$$0 < \alpha - a < \frac{\epsilon}{6M} \text{ e } 0 < b - \beta < \frac{\epsilon}{6M}.$$

Como  $f$  é contínua em  $[\alpha, \beta]$ , existe uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[\alpha, \beta]$  tal que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então,  $\mathcal{P} \cup \{a, b\}$  é uma partição de  $[a, b]$  e

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P} \cup \{a, b\}) - s(f, \mathcal{P} \cup \{a, b\}) &\leq 2M(\alpha - a) + [S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})] + 2M(b - \beta) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond,  $f$  é integrável ♣

## 26. Integrabilidade da composição $\varphi \circ f$ .

**Teorema.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tais que  $\text{Imagem}(f) = f([a, b]) \subset [c, d]$ . Então, a composição  $\varphi \circ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.*

**Prova.**

Existe  $M$  tal que  $|\varphi(y)| \leq M$  para todo  $y$  em  $[c, d]$ .

Seja  $\epsilon > 0$ . Notemos que  $\varphi$  é uniformemente contínua e existe  $\delta > 0$  tal que

$$|y - y'| < \delta \text{ implica } |\varphi(y) - \varphi(y')| < \epsilon.$$

Como  $f$  é integrável, existe uma partição  $\{x_0 = a < \dots < x_n = b\}$  tal que

$$\sum (M_i - m_i) \Delta x_i < \epsilon \delta,$$

onde  $m_i$  e  $M_i$  são os respectivos inf e sup de  $f$  no sub-intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Para a composição  $\varphi \circ f$ , consideremos a soma

$$\sum (N_i - n_i) \Delta x_i,$$

onde  $n_i$  e  $N_i$  são o inf e o sup de  $\varphi \circ f$  no sub-intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Escrevamos

$$\sum (N_i - n_i) \Delta x_i = \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (N_i - n_i) \Delta x_i + \sum_{i: (M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i) \Delta x_i.$$

É trivial ver que

$$\epsilon \delta \geq \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (M_i - m_i) \Delta x_i \geq \delta \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} \Delta x_i \text{ e então } \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} \Delta x_i \leq \epsilon.$$

É trivial ver que  $N_i - n_i \leq \epsilon$ . Segue

$$\sum_{(M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i) \Delta x_i \leq \epsilon(b - a).$$

É trivial ver que  $N_i - n_i \leq 2M$ . Segue

$$\sum (N_i - n_i) \Delta x_i = \sum_{(M_i - m_i) \geq \delta} (N_i - n_i) \Delta x_i + \sum_{(M_i - m_i) < \delta} (N_i - n_i) \Delta x_i \leq 2M\epsilon + \epsilon(b - a).$$

Portanto, pelo teorema de Darboux e Du Bois-Reymond,  $\varphi \circ f$  é integrável ♣

**Atenção.** Se  $f$  é contínua e  $\varphi$  integrável, pode ocorrer  $\varphi \circ f$  não integrável.

Vide Jintan Lu, *Is the composite function integrable?* em Referências.

## 27. Teorema da Substituição-Mudança de Variável Generalizado.

A versão mais simples deste teorema supõe as funções e as derivadas envolvidas contínuas em intervalos fechados, com a inversa da mudança de variável derivável.

Comentário baseado em T. M. Apostol *Análisis Matemático*, pp. 199–200. A versão mais geral do *Teorema da Substituição-Mudança de Variável* (na integral de Riemann uni-dimensional) não requer a continuidade das funções envolvidas e não requer que a substituição seja inversível. Tal versão tem a forma

$$\int_{G(\alpha)}^{G(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(G(t))g(t)dt,$$

com  $f$  integrável no intervalo  $G([\alpha, \beta])$  e a substituição  $G : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$G(t) = G(\alpha) + \int_{\alpha}^t g(\tau)d\tau,$$

para alguma  $g$  integrável em  $[\alpha, \beta]$ . Destaquemos que a identidade  $G'(t) = g(t)$  é válida nos pontos de continuidade de  $g$  mas não é assegurada nos demais pontos. A primeira prova da versão geral deve-se a H. Kestelman (1961). Na mesma revista, no mesmo número, R. Davies, simplifica a prova de Kestelman. Desde então, muitos artigos foram e tem sido publicados sobre esta versão geral.

O livro de T. M. Apostol não prova a versão geral. A prova de Kestelman utiliza o conceito *medida nula*, que advém da teoria da medida de Lebesgue.

A versão que provamos a seguir, apresenta as seguintes características.

- É de simples enunciado e com prova muito elementar.
- Se aplica em alguns casos em que a “versão geral” não se aplica.
- É mais forte que as em *Basic Real Analysis*, A. W. Knapp, pp. 37–38 (a prova nestas notas tem semelhanças e várias diferenças com relação à prova em tal livro) e em W. Rudin *Principles of Mathematical Analysis*, p. 133.
- Não consta nos livros em Referências.

Nesta prova admitimos partições

$$\mathcal{X} = \{a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b\},$$

com pontos repetidos. Vários autores (Knapp, Lang, Rudin, Spivak, etc.) assim procedem. Uma vantagem destas é que a integral de uma função sobre um só ponto é automaticamente zero. Quanto a investigar a existência e o valor da integral de uma dada função, tanto faz que a partição tenha ou não pontos repetidos.

**Teorema (Teorema da Mudança de Variável Generalizado).** *Sejam*

$$f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ integrável e } \varphi : [a, b] \longrightarrow [\alpha, \beta]$$

*sobrejetora, crescente (não necessariamente estritamente crescente) e contínua. Suponhamos  $\varphi$  derivável em  $(a, b)$ . As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- Se  $\varphi'$  é integrável em  $[a, b]$ , então o produto  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é integrável em  $[a, b]$ .
- Se o produto  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é integrável em  $[a, b]$ , então vale a fórmula

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Prova.**

- ◇ A hipótese  $\varphi$  contínua é supérflua. Dado  $t \in [a, b]$ , seja  $x = \varphi(t) \in [\alpha, \beta]$ . Sejam  $x'$  e  $x''$  tais que  $x \in [x', x''] \subset [\alpha, \beta]$ . Como  $\varphi$  é sobrejetora e crescente, existem  $t'$  e  $t''$ , ambos em  $[a, b]$  e  $t' \leq t''$ , tais que  $\varphi(t') = x'$  e  $\varphi(t'') = x''$ . Como  $\varphi$  é crescente, temos  $\varphi([t', t'']) \subset [x', x'']$ . Logo,  $\varphi$  é contínua [notemos que se  $x' < x$  então  $t' < t$  e, analogamente, se  $x < x''$  então  $t < t''$ ].
- ◇ A função  $\varphi$  é uniformemente contínua. Trivial.
- ◇ Temos  $\varphi' \geq 0$  no intervalo aberto  $(a, b)$ . Óbvio, pois  $\varphi$  é crescente.
- ◇ Para integrar  $\varphi'$ , é claro que podemos definir  $\varphi'(a)$  e  $\varphi'(b)$  arbitrariamente.



- ◇ Seja  $\mathcal{T} = \{a = t_0 \leq \dots \leq t_n = b\}$  uma partição arbitrária do intervalo  $[a, b]$  e seja  $\mathcal{X} = \{\alpha = x_0 \leq \dots \leq x_n = \beta\}$  a partição do intervalo  $[\alpha, \beta]$  dada por  $\mathcal{X} = \varphi(\mathcal{T})$ . Isto é, suponhamos  $x_i = \varphi(t_i)$  para cada  $i = 0, \dots, n$ .

Pelo TVM, existe  $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tal que  $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\bar{t}_i)\Delta t_i$ .

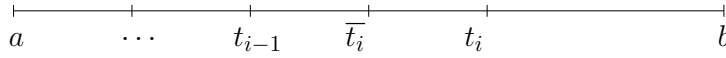


Figura 17: O ponto  $\bar{t}_i$  relaciona comprimentos:  $\Delta x_i = \varphi'(\bar{t}_i)\Delta t_i$ .

- ◇ Se  $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$ , então  $|\mathcal{X}| \rightarrow 0$ . Segue da continuidade uniforme de  $\varphi$  pois dado  $\delta_1 > 0$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que temos  $|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq \delta_1$  se  $|t - \tau| \leq \delta_2$ .
- ◇ Se  $\varphi'$  é integrável, então  $(f \circ \varphi)\varphi'$  também. Seja  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , arbitrário. Notemos que  $\varphi(\tau_i) \in [x_{i-1}, x_i]$ . Analisemos a soma de Riemann

$$\sum f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i = \sum f(\varphi(\tau_i))\Delta x_i + \sum f(\varphi(\tau_i))[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{t}_i)]\Delta t_i.$$

Se  $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$  então  $|\mathcal{X}| \rightarrow 0$  e a primeira soma no lado direito tende a  $\int_{\alpha}^{\beta} f dx$ .

Seja  $M$  uma constante tal que  $|f| \leq M$  (existe, pois  $f$  é limitada). Segue

$$\left| \sum f(\varphi(\tau_i))[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(\bar{t}_i)]\Delta t_i \right| \leq M[S(\varphi', \mathcal{T}) - s(\varphi', \mathcal{T})] \xrightarrow{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} 0.$$

Logo,  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é integrável (o valor da integral é igual ao da integral de  $f$ ).

- ◇ Se  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é integrável, o valor de sua integral é igual ao da integral de  $f$ .

Com as notações acima, seja  $\tau_i = \bar{t}_i$  e escrevamos  $\bar{x}_i = \varphi(\bar{t}_i)$ .

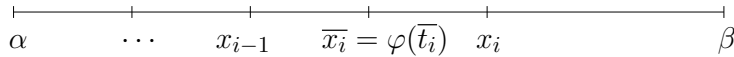


Figura 18: O ponto  $\bar{x}_i = \varphi(\bar{t}_i)$ , onde  $\Delta x_i = \varphi'(\bar{t}_i)\Delta t_i$ .

Segue então

$$\sum f(\varphi(\bar{t}_i))\varphi'(\bar{t}_i)\Delta t_i = \sum f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

Se  $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$ , por definição o lado esquerdo converge à integral de  $(f \circ \varphi)\varphi'$ .

Se  $|\mathcal{T}| \rightarrow 0$ , então  $|\mathcal{X}| \rightarrow 0$ . Portanto, o lado direito tende à integral de  $f$  ♣

**Corolário.** Mantidas as demais hipóteses no teorema acima, suponhamos  $\varphi$  monótona (isto é, crescente ou decrescente). Então segue

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Prova.**

◇ O caso  $\varphi$  crescente já está provado. Suponhamos  $\varphi$  decrescente. Então,

$$\psi(s) = \varphi(a + b - s), \text{ onde } t \in [a, b]$$

é crescente. Pelo teorema segue

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\psi(s))\psi'(s)ds = - \int_a^b f(\varphi(a + b - s))\varphi'(a + b - s)ds.$$

Logo, com a troca de variável  $t = a + b - s$  obtemos

$$\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx = \int_b^a f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \clubsuit$$

A seguir, vejamos um exemplo que distingue esta versão da “versão geral”.

**Exemplo (Um exemplo em que o teorema acima se aplica mas a “versão geral” não).** Consideremos o par de funções

$$f(x) = x, \text{ se } x \in [0, 1], \quad \text{e} \quad \varphi(t) = \sqrt{t} \text{ se } t \in [0, 1].$$

Obviamente  $f$  é integrável. Ainda,  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, crescente e contínua. Ainda, a função derivada  $\varphi'$  está definida no intervalo aberto  $(0, 1)$  e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

É trivial ver que  $\varphi'$  não é limitada e portanto não é integrável em  $(0, 1)$ .

É trivial ver que a função

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}$$

é integrável. Logo, pelo teorema demonstrado acima segue

$$\int_0^1 x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dt.$$

Por outro lado,  $\varphi'$  não é integrável em  $(0, 1)$  e então não podemos escrever

$$\sqrt{t} = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Desta forma, a “versão geral” (com  $g = \varphi'$ ) não se aplica neste caso  $\clubsuit$

## 28. Uma Função $C^\infty$ mas não Aproximável via Fórmula de Taylor.

**Exemplo.** Uma função de classe  $C^\infty$  mas não analítica. A função

$$\Lambda(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é tal que  $\Lambda^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$  e de classe  $C^\infty$  na reta.

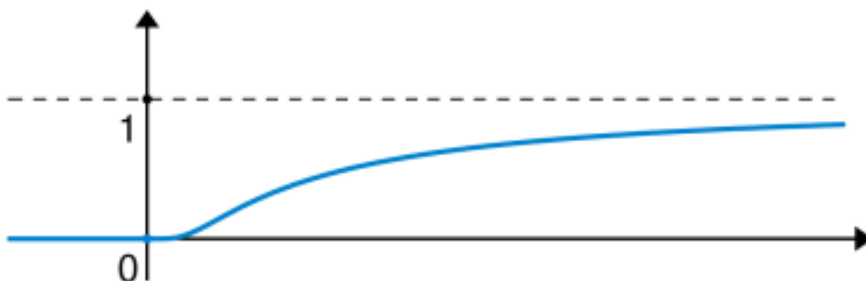


Figura 19: Gráfico de  $\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ , se  $x > 0$ , com  $\Lambda(x) = 0$  se  $x \leq 0$ .

**Verificação.** Seja  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

É claro que  $\Lambda(1) = e^{-1}$ . É também claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Cada derivada  $\Lambda^{(n)}$  [com  $\Lambda^{(0)} = \Lambda$ ] satisfaz

$$\Lambda^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{para todo } x > 0, \quad \text{com } P_n \text{ um polinômio.}$$

Ainda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda^{(n)}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} P_n(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{P_n(y)}{e^y} = 0.$$

Temos também

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\Lambda^{(n)}(x) - 0}{x - 0} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y} P_n(y) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y P_n(y)}{e^y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por indução segue que  $\Lambda, \Lambda', \Lambda'', \Lambda^{(3)}, \dots$  são todas contínuas na origem e portanto contínuas na reta. Logo,  $\Lambda$  é infinitamente derivável ♣

## 29. O $\delta$ de Dirac.

**Definição.** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o **suporte** de  $f$  é o menor conjunto fechado que contém o conjunto no qual a função  $f$  não se anula. Temos a notação

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

**Exemplo.** Seja  $\Lambda = \Lambda(x)$  como no exemplo na seção *Uma Função  $C^\infty$  mas não Aproximável via Fórmula de Taylor*. Consideremos a função

$$\Phi(x) = \Lambda(1 - x^2).$$

A função  $\Phi$  é de classe  $C^\infty$  na reta e satisfaz

$$0 \leq \Phi(x) \leq e^{-1} \leq 1 \text{ e } \text{supp}(\Phi) = [-1, +1].$$

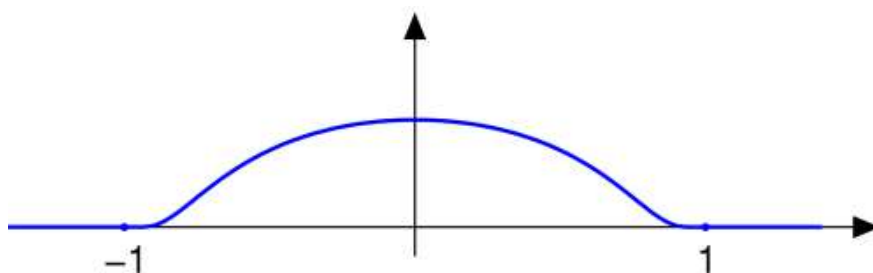


Figura 20: Gráfico da função  $\Phi$ .

A expressão para  $\Phi$  é

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário } \clubsuit \end{cases}$$

A seguir, consideremos o número

$$c = \int_{-1}^{+1} \Phi(x) dx > 0.$$

Definamos a função

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{c}.$$

Então, temos

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Dado um arbitrário  $\epsilon > 0$ , consideremos a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon}.$$

A função  $\varphi_\epsilon$  é de classe  $C^\infty$  na reta e satisfaz

$$0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{e} \quad \text{supp}(\varphi_\epsilon)(x) = [-\epsilon, \epsilon].$$

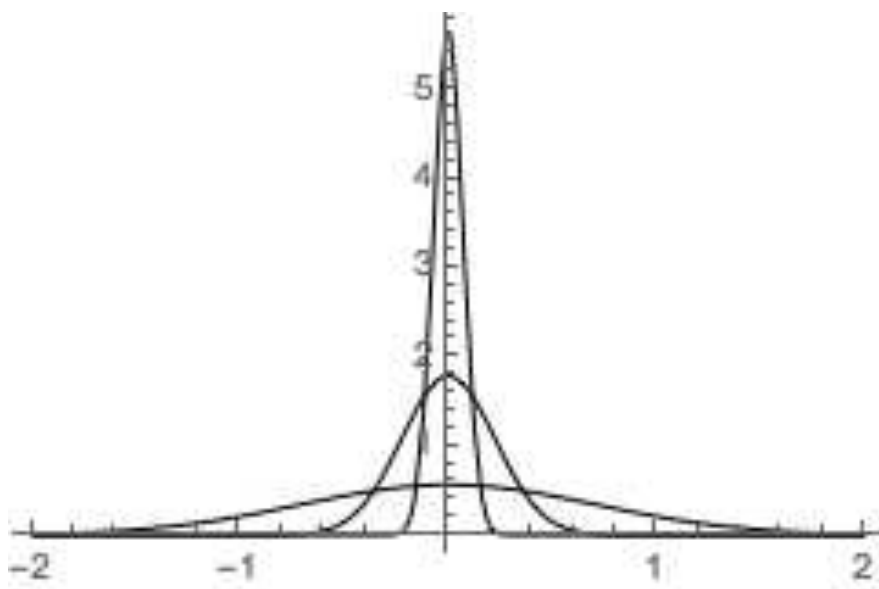


Figura 21: Ilustração para o gráfico de  $\varphi_\epsilon$ , conforme  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Ainda mais,

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_\epsilon(x) dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\epsilon} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\epsilon} \epsilon dt \\ &= \int_{-1}^1 \varphi(t) dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Teorema.** *Seja  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Consideremos a família de funções*

$$\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } 0 < \epsilon < 1,$$

*acima definidas. Então,*

$$\int_{-1}^1 f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(0).$$

**Prova.**

O primeiro TVM para integrais, generalizado, garante a existência de um ponto  $\bar{x} \in [-\epsilon, \epsilon]$ , com  $\bar{x} = \bar{x}(\epsilon)$  dependendo de  $\epsilon$ , tal que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)\varphi_\epsilon(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\varphi_\epsilon(x)dx \\ &= f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua na origem, temos que

$$f(\bar{x}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f(0) \clubsuit$$

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , infinitamente derivável e de suporte compacto (i.e.,  $f$  é identicamente nula no complementar de algum intervalo fechado e limitado) definimos o  $\delta$  de Dirac

$$\delta(f) = f(0).$$

Dizemos que a família de funções

$$\{\varphi_\epsilon : 0 < \epsilon < 1\}$$

se aproxima do  $\delta$  de Dirac, se  $\epsilon \rightarrow 0$ . Escrevemos então

$$\varphi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta.$$

### 30. A Primitiva $\int e^{-x^2} dx$ não é Elementar .

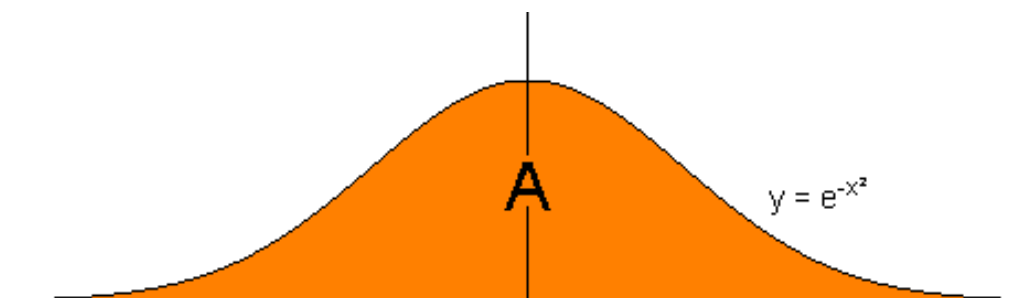


Figura 22: O gráfico de  $e^{-x^2}$  e a região  $A$  entre tal gráfico e o eixo  $Ox$ .

**Uma função elementar**, é uma função de uma variável (real ou complexa) que pode ser expressa com as quatro operações básicas da aritmética, e pela composição da exponenciação, do logaritmo, das constantes e da radiciação.

As funções trigonométricas e as funções seno e cosseno hiperbólicos e suas inversas são também elementares pois todas elas são exprimíveis pela função exponencial complexa e pelo logaritmo.

O conjunto das funções elementares é fechado pelas quatro operações básicas, pela composição e pela derivação.

As funções elementares são analíticas exceto em um conjunto finito de pontos.

O conjunto das funções elementares não é fechado por limites, somas infinitas e integração.

O seguinte teorema se deve a Liouville.

**Teorema (Liouville).** *Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções racionais, com  $g(x)$  não constante. Suponhamos que*

$$\int f(x)e^{g(x)} dx$$

*é uma função elementar. Então, existe uma função racional  $R(x)$  tal que*

$$\int f(x)e^{g(x)} dx = R(x)e^{g(x)}.$$

Utilizemos tal teorema de Liouville para provarmos o próximo resultado.

**Corolário.** A primitiva

$$\int e^{-x^2} dx$$

não é elementar.

**Prova.**

Suponhamos que a primitiva acima é elementar. Então, pelo teorema de Liouville existe uma função racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

com  $P$  e  $Q$  polinômios e  $Q$  não nulo, e com  $P$  e  $Q$  sem raízes em comum, satisfazendo

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-x^2}.$$

Obviamente  $P(x)$  é não nulo. Derivando tal identidade encontramos

$$e^{-x^2} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)} e^{-x^2} + \frac{P(x)}{Q(x)} (-2xe^{-x^2}).$$

Donde segue

$$Q^2(x) = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) - 2xP(x)Q(x), \text{ para todo } x.$$

◇ O caso  $Q(x)$  uma constante  $c$ , com  $c \neq 0$ . Então encontramos

$$c^2 = cP'(x) - 2cxP(x),$$

o que é impossível pois  $\text{grau}(c^2) = 0$  e  $\text{grau}[cP'(x) - 2cxP(x)] \geq 1$ .

◇ O caso  $Q(x)$  não constante. A identidade polinomial acima obtida é válida para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ . Logo, ela vale também para todo  $z$  em  $\mathbb{C}$ . Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  [com existência garantida pelo TFA] tal que

$$Q(\alpha) = 0.$$

Seja  $m$  a multiplicidade algébrica de  $\alpha$  como raiz de  $Q(z)$ . Pela identidade que estamos utilizando segue que

$$(z - \alpha)^m \text{ divide } Q'.$$

Logo,  $\alpha$  é raiz de multiplicidade  $m + 1$  de  $Q(z)$  †

A prova está encerrada ♣



### 31. Teorema de Caracterização da Integral de Riemann.

#### A - Continuidade e Oscilação.

A descontinuidade de uma função em um ponto pode ser de *primeira espécie*, também dita de tipo “salto” (os limites laterais existem e são distintos), ou de *segunda espécie* (ao menos um dos limites laterais não existe). Mostremos que dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada, podemos medir sua continuidade/descontinuidade em pontos de  $[a, b]$ .

**Definição.** Seja  $p \in [a, b]$ . Para cada  $r > 0$  sejam

$$m(f, p, r) = \inf_{x \in [p-r, p+r]} f(x) \quad \text{e} \quad M(f, p, r) = \sup_{x \in [p-r, p+r]} f(x).$$

A notação acima subentende que  $x$  pertence a  $[a, b]$ , o domínio de  $f$ .

Também escrevemos (abusando da notação)

$$\left\{ \begin{array}{l} m(f, p, r) = \inf \{ f(x) : x \in [p-r, p+r] \} = \inf f([p-r, p+r]) \\ M(f, p, r) = \sup \{ f(x) : x \in [p-r, p+r] \} = \sup f([p-r, p+r]). \end{array} \right.$$

Fixado  $p$  no intervalo  $[a, b]$ , é fácil ver que

$$\left\{ \begin{array}{l} m(f, p, r) \text{ é uma função crescente se } r \rightarrow 0 \\ M(f, p, r) \text{ é uma função decrescente se } r \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Assim, a diferença  $M(f, p, r) - m(f, p, r)$  é **decrescente** se  $r \rightarrow 0$ .

Consequentemente, sempre existe a **oscilação** de  $f$  em  $p$ :

$$\boxed{\text{osc}(f, p) = \lim_{r \rightarrow 0} [M(f, p, r) - m(f, p, r)].}$$

**Definição.** Um subconjunto  $F$  da reta é dito **fechado** se para toda sequência  $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$  de pontos de  $F$  e convergente a um ponto  $x$  da reta (escrevemos  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ ), então tal ponto limite  $x$  pertence ao subconjunto  $F$ .

**Propriedades da Oscilação.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Vale o que segue.

(i)  $f$  é contínua em  $p$  se e só se  $\text{osc}(f, p) = 0$ .

(ii) Para todo  $\epsilon > 0$ , é um fechado o conjunto

$$F = \left\{ p \in [a, b] : \text{osc}(f, p) \geq \epsilon \right\}.$$

**Prova.**

(i) ( $\Rightarrow$ ) Dado  $\epsilon > 0$ , por hipótese existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(p)| < \epsilon$  se  $x \in [p - \delta, p + \delta]$  (e  $x \in [a, b]$ ). Logo,  $M(f, p, \delta) - m(f, p, \delta) \leq 2\epsilon$ .  
 Onde segue,  $\text{osc}(f, p) \leq 2\epsilon$  para qualquer  $\epsilon > 0$ . Logo,  $\text{osc}(f, p) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Solicitamos ao leitor.

(ii) Seja  $(p_n) = (p_1, p_2, \dots)$  uma sequência de pontos pertencentes ao conjunto  $F$  e tal que  $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$ , onde  $p \in \mathbb{R}$ . Devemos mostrar que  $p \in F$ .

Por hipótese, temos  $a \leq p_n \leq b$  para todo  $n$ . Logo, é trivial ver que  $p$  satisfaz  $a \leq p \leq b$ . Isto é,  $p \in [a, b]$ .

Seja  $r > 0$ . Como  $p_n \rightarrow p$ , então existe algum  $j$  tal que  $p_j \in (p - r, p + r)$ .

Então, existe  $0 < d < r$  tal que  $[p_j - d, p_j + d] \subset (p - r, p + r)$ .

Segue  $m(f, p, r) \leq m(f, p_j, d) \leq M(f, p_j, d) \leq M(f, p, r)$ . Assim, e lembrando que a oscilação é uma função decrescente se  $r \rightarrow 0^+$ , encontramos

$$M(f, p, r) - m(f, p, r) \geq M(f, p_j, d) - m(f, p_j, d) \geq \text{osc}(f, p_j) \geq \epsilon$$

para todo  $r > 0$ . Onde segue  $\text{osc}(f, p) \geq \epsilon$ . Logo,  $p \in F$  e  $F$  é fechado ♣

**Observação.** Seja  $D$  o conjunto de descontinuidades da função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f$  limitada. Dado  $\epsilon > 0$ , seja

$$D_\epsilon = \{p \in [a, b] : \text{osc}(f, p) > \epsilon\}.$$

É fácil ver que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup D_{\frac{1}{3}} \cup \dots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \dots$$

## B - Conteúdo Nulo, Compactos e Medida Nula.

**Definição.** Seja  $D$  um conjunto, com  $D \subset \mathbb{R}$  ou  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

- Um retângulo fechado e limitado tem a forma  $[a, b] \times [c, d]$ .
- O conjunto  $D$  é **compacto** se  $D$  é fechado e limitado. Logo, um intervalo/retângulo  $J$  é fechado e limitado se e somente se  $J$  é compacto.
- $D$  tem **conteúdo nulo** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma coleção finita de intervalos/retângulos compactos  $J_1, \dots, J_k$  tal que  $D \subset J_1 \cup \dots \cup J_k$  e

$$\sum_{i=1}^k m(J_i) < \epsilon,$$

onde  $m(J_i)$  é o comprimento/área do intervalo/retângulo  $J_i$ .

- $D$  tem **medida nula** se, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma coleção contável de intervalos/retângulos compactos  $J_1, J_2, J_3, \dots$  tal que  $D \subset J_1 \cup J_2 \cup \dots$  e

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(J_i) \leq \epsilon \quad [\text{isto é, } m(J_1) + \dots + m(J_k) \leq \epsilon, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}].$$

Nas definições acima de conteúdo nulo e de medida nula, se trocarmos a condição "intervalos/retângulos compactos" pela condição "intervalos/retângulos abertos e limitados" obtemos definições equivalentes às enunciadas. Verifique.

**Exemplo.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $f$  é integrável se e somente se o gráfico de  $f$ , denotado  $\text{Gr}(f)$ , tem conteúdo nulo em  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução.** Utilizemos as notações para as somas de Darboux. Sabemos que a função  $f$  é integrável se e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $\{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  determinando sub-intervalos  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$  tais que

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i) m(J_i) < \epsilon.$$

Por fim, a coleção de retângulos  $R_i = J_i \times [m_i, M_i]$  recobre  $\text{Gr}(f)$  e satisfaz

$$\sum_{i=1}^n m(R_i) = \sum_{i=1}^n m(J_i)(M_i - m_i) < \epsilon \spadesuit$$

**Lema 1.** *Seja  $K$  compacto, com  $K \subset \mathbb{R}^2$  ou  $K \subset \mathbb{R}$ . Seja  $R_1, R_2, R_3, \dots$  uma coleção contável de retângulos/intervalos abertos cobrindo  $K$ . Isto é,*

$$K \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cdots .$$

*Então, tal cobertura admite subcobertura finita. Isto é, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$K \subset R_1 \cup \cdots \cup R_N.$$

**Prova.**

Suponhamos, por absurdo, que não. Então, para todo  $n$  existe um ponto

$$p_n \in K \setminus (R_1 \cup \cdots \cup R_n).$$

A sequência  $(p_1, p_2, \dots)$  está contida em  $K$  que é limitado (pois compacto). Logo,  $(p_1, p_2, \dots)$  admite uma subsequência convergente  $(p_{n_1}, p_{n_2}, \dots)$  a um ponto  $p$ .

O conjunto  $K$  é fechado (pois compacto) e  $p_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p$ . Logo,  $p \in K$ . Segue então que existe  $j$  tal que  $p \in R_j$ . Como  $R_j$  é um retângulo/intervalo aberto e  $p_{n_k} \rightarrow p$ , segue que para todo  $k$  grande o suficiente temos  $p_{n_k} \in R_j$ .

**Lema 2.** *Seja  $K$  um conjunto compacto e de medida nula, com  $K \subset \mathbb{R}$  ou  $K \subset \mathbb{R}^2$ . Então,  $K$  tem conteúdo nulo.*

**Prova.**

Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\{R_k : k \in \mathbb{N}\}$  uma coleção contável de retângulos/intervalos abertos tal que

$$K \subset R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cdots \text{ e } \sum_{k=1}^{+\infty} m(R_k) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo Lema 1, existe  $N$  tal que  $K \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_N$ . É óbvio que  $m(R_1) + \cdots + m(R_N) \leq \epsilon/2 < \epsilon$  ♣

**Lema 3.** *Seja  $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$  uma família contável (enumerável) de conjuntos de medida nula em  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$  tem medida nula.*

**Prova.** Seja  $\epsilon > 0$ .

Como  $X_1$  tem medida nula, segue que existe uma coleção contável de retângulos  $R_1^1, R_2^1, R_3^1, \dots$  satisfazendo

$$X_1 \subset R_1^1 \cup R_2^1 \cup \dots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^1) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Analogamente, fixado um índice  $j$  arbitrário em  $\mathbb{N}$ , existe uma coleção enumerável de retângulos  $R_1^j, R_2^j, R_3^j, \dots$  satisfazendo

$$X_j \subset R_1^j \cup R_2^j \cup \dots \quad \text{e} \quad \sum_i m(R_i^j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, como  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  é um conjunto contável, segue que a coleção de retângulos  $\mathcal{C} = \{R_i^j : i \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \mathbb{N}\}$  é contável. Ainda mais, é trivial ver que qualquer subcoleção finita de retângulos em  $\mathcal{C}$  está contida em alguma sub-coleção finita do tipo  $\{R_i^j : 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq N\}$ , para  $N$  suficientemente grande. Também é fácil ver que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m(R_i^j) &= \sum_{i=1}^N m(R_i^1) + \sum_{i=1}^N m(R_i^2) + \dots + \sum_{i=1}^N m(R_i^N) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \dots + \frac{\epsilon}{2^N} \\ &= \epsilon \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^N} \right) < \epsilon. \end{aligned}$$

Consequentemente obtemos

$$\sum_{i,j} m(R_i^j) \leq \epsilon.$$

Logo,  $X$  tem medida nula ♣

### C - O Teorema de Lebesgue.

**Teorema de Caracterização (Lebesgue).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada. Seja  $D$  o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ . Então,  $f$  é integrável se e somente se  $D$  tem medida nula.*

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Já vimos que

$$D = D_1 \cup D_{\frac{1}{2}} \cup \dots \cup D_{\frac{1}{n}} \cup \dots, \text{ onde } D_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : \text{osc}(f, x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Como a união contável de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula, basta provarmos que cada  $D_{\frac{1}{n}}$  tem medida nula. Fixemos  $n$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\mathcal{P} = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$  uma partição tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Seja  $\mathcal{C}$  a coleção dos sub-intervalos  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$  que contém algum ponto de  $D_{\frac{1}{n}}$  em seu interior [isto é, a intersecção  $(x_{i-1}, x_i) \cap D_{\frac{1}{n}}$  é não vazia]. Para todo  $J_i$  em  $\mathcal{C}$  temos  $M_i - m_i \geq 1/n$ . Logo,

$$\frac{1}{n} \sum_{J_i \in \mathcal{C}} m(J_i) \leq \sum_{J_i \in \mathcal{C}} (M_i - m_i) m(J_i) \leq S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\epsilon}{n}.$$

Donde segue

$$\sum_{J_i \in \mathcal{C}} m(J_i) < \epsilon.$$

É claro que  $D_{\frac{1}{n}}$  está contido na união dos sub-intervalos em  $\mathcal{C}$  com as extremidades  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Cada  $\{x_i\} = [x_i, x_i]$  é um sub-intervalo de comprimento 0. Assim, cobrimos  $D_{\frac{1}{n}}$  por um número finito de sub-intervalos cuja soma dos comprimentos é menor que  $\epsilon$ . Logo,  $D_{\frac{1}{n}}$  tem medida nula.

( $\Leftarrow$ ) Dado  $\epsilon > 0$  temos que  $D_\epsilon = \{x \in [a, b] : \text{osc}(f, x) \geq \epsilon\}$  está contido em  $D$  e portanto tem medida nula. Pela Propriedade da oscilação (ii) segue que  $D_\epsilon$  é compacto. Então, pelo Lema 2 segue que  $D_\epsilon$  tem conteúdo nulo.

Consideremos (pois existe) uma quantidade finita de sub-intervalos abertos  $I_1, \dots, I_l$  que recobre  $D_\epsilon$  e tal que  $m(I_1) + \dots + m(I_l) < \epsilon$ .

Seja  $x$  um ponto arbitrário em  $[a, b] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_l)$ . Temos  $\text{osc}(f, x) < \epsilon$ . Logo, existe um sub-intervalo aberto  $I_x$  centrado em  $x$  e tal que a oscilação de  $f$  no conjunto  $I_x \cap [a, b]$  é menor que  $\epsilon$ . Isto é,

$$\left( \sup_{I_x \cap [a, b]} f - \inf_{I_x \cap [a, b]} f \right) < \epsilon.$$

Então, como a reunião de tais sub-intervalos abertos  $I_x$  recobre o conjunto

$$K = [a, b] \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_l),$$

e  $K$  é compacto (pois fechado e limitado, **cheque**), temos que existem  $I_{x_1}, \dots, I_{x_m}$  tais que  $K \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_m}$  (**cheque**).

Consideremos a coleção de sub-intervalos abertos

$$\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_l, I_{x_1}, \dots, I_{x_m}\}.$$

É óbvio que  $[a, b]$  está contido na união dos sub-intervalos em  $\mathcal{I}$ . Seja (**cheque**)  $\mathcal{P}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que cada sub-intervalo  $J$  determinado por  $\mathcal{P}$  está contido em um dos sub-intervalos da coleção  $\mathcal{I}$ . Separemos os sub-intervalos determinados por  $\mathcal{P}$  em duas coleções disjuntas:  $\mathcal{J}_1$  contém os sub-intervalos contidos em algum  $I_j$ , onde  $1 \leq j \leq l$ , e a coleção  $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$ .

Sejam  $M_J$  e  $m_J$  o supremo e o ínfimo de  $f$  retriba a  $J$ , respectivamente. Seja  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ .

Se  $J$  pertence a  $\mathcal{J}_2$ , então  $J$  está contido em algum sub-intervalo  $I_{x_j}$ , com  $1 \leq j \leq m$ , e temos  $M_J - m_J < \epsilon$ .

Se  $J \in \mathcal{J}_1$ , então  $0 \leq M_J - m_J \leq 2M$ . Finalmente, concluímos que

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{J \in \mathcal{J}_1} (M_J - m_J)m(J) + \sum_{J \in \mathcal{J}_2} (M_J - m_J)m(J) \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^l m(I_j) + \epsilon \sum_{J \in \mathcal{J}_2} m(J) \\ &\leq 2M\epsilon + \epsilon(b-a) \clubsuit \end{aligned}$$

## D - Um Importante Teste de Integrabilidade.

A demonstração do *Teorema de Lebesgue para a Caracterização das Integrais de Riemann* revela um importante teste de integrabilidade baseado na oscilação.

**Teste de Integrabilidade.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $f$  é integrável se e somente se  $f$  é limitada e para todo par  $\epsilon > 0$  e  $\eta > 0$  existe uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \dots \leq x_n = b\}$  de  $[a, b]$  tal que o comprimento total dos sub-intervalos  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$  com oscilação  $\text{osc}(f, J_i) > \eta$  é menor que  $\epsilon$ . Isto é,

$$\sum_{i: \text{osc}(f, J_i) > \eta} m(J_i) < \epsilon.$$

### Prova.

◇ Utilizemos as notações usuais para somas de Darboux. Dada uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \dots \leq x_n = b\}$  de  $[a, b]$ , sejam  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$  e  $m(J_i) = \Delta x_i$ . É claro que a oscilação de  $f$  no sub-intervalo  $J_i$  é  $\text{osc}(f, J_i) = M_i - m_i$ .

( $\Rightarrow$ ) Neste caso, existe uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \dots \leq x_n = b\}$  tal que

$$\sum (M_i - m_i)m(J_i) < \epsilon\eta.$$

Seja  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\eta = \{i : \text{osc}(f, J_i) > \eta\}$ . Segue

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \eta m(J_i) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{osc}(f, J_i) m(J_i) < \epsilon\eta.$$

Logo,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} m(J_i) < \epsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a \leq \dots \leq x_n = b\}$  tal que

$$\sum_{i: \text{osc}(f, J_i) > \epsilon} m(J_i) < \epsilon.$$

Seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Segue

$$\begin{aligned} \sum (M_i - m_i)m(J_i) &= \sum_{i: \text{osc}(f, J_i) > \epsilon} (M_i - m_i)m(J_i) + \sum_{i: \text{osc}(f, J_i) \leq \epsilon} \text{osc}(f, J_i)m(J_i) \\ &\leq 2M\epsilon + \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é integrável ♣



## E - Aplicação do Teorema de Lebesgue.

**Exemplos.** Sejam  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$ . Valem as propriedades,

(i)  $fg$  é integrável em  $[a, b]$ .

(ii) Suponhamos  $f$  positiva [isto é,  $f \geq 0$ ]. Então, temos

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

se e somente se  $f$  é nula com a possível exceção do conjunto de medida nula constituído por seus pontos de descontinuidade.

### Prova.

(i) Sejam  $D(fg)$ ,  $D(f)$  e  $D(g)$ , os conjuntos das descontinuidades de  $fg$ ,  $f$  e  $g$ , respectivamente. É óbvio que  $D(fg) \subset D(f) \cup D(g)$ . Pelo Teorema de Lebesgue,  $D(f)$  e  $D(g)$  tem medida nula. Pelo Lema 3, o conjunto  $D(fg)$  tem medida nula. O Teorema de Lebesgue mostra que  $fg$  é integrável.

(ii) ( $\Rightarrow$ ) Seja  $x_0$  um ponto de continuidade de  $f$ . Existe um sub-intervalo  $J$ , com  $x_0 \in J \subset [a, b]$  e  $m(J) > 0$ , satisfazendo

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \text{ para todo } x \in J.$$

Logo,

$$0 \leq \frac{f(x_0)}{2} m(J) \leq \int_a^b f dx = \int_a^b f dx = 0.$$

Portanto,  $f(x_0) = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $\mathcal{P}$  uma partição (de pontos distintos) de  $[a, b]$ . Indiquemos por  $J_i$  os sub-intervalos determinados por  $\mathcal{P}$ . Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$  tem medida nula, segue que  $f$  não é descontínua em todos os pontos de  $J_i$ . Logo,  $f$  é contínua em ao menos um ponto de  $J_i$ . Devido à hipótese,  $f$  é nula em tal ponto. Obtemos então, para a soma inferior de  $f$  em relação a tal partição,

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_i m_i m(J_i) = 0.$$

Como esta soma inferior é arbitrária e  $f$  é integrável, concluímos que a integral de  $f$  é zero ♣

**32. A identidade**  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

Esta seção utiliza coordenadas polares, integral imprópria e integral dupla.

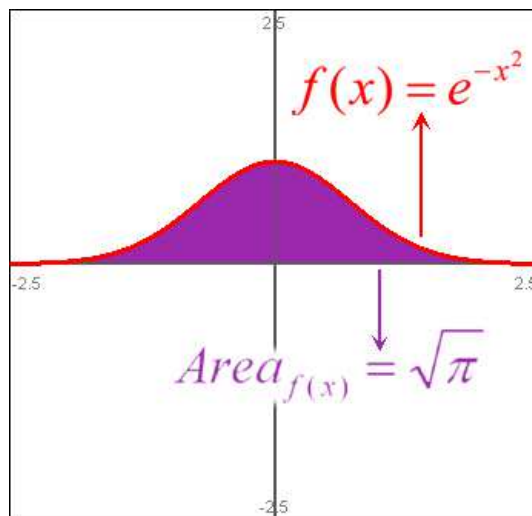


Figura 23: Ilustração para  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

Apesar de não termos uma fórmula elementar para a função

$$g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ onde } x \geq 0,$$

consequimos computar a integral de  $e^{-x^2}$  em toda a reta. Notemos que

$g$  é positiva e crescente em  $(0, +\infty)$ .

Assim, existe (como número real positivo ou como o valor  $+\infty$ ) o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Como a função positiva  $e^{-x^2}$  é par, temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

A seguir, computamos  $I^2 = I \cdot I$  e mostramos que  $I^2 = \pi$ .

Seja  $r > 0$  e arbitrário. Notemos que

$$\begin{aligned} I^2 = I.I &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-r}^r e^{-y^2} dy \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \iint_{[-r,r] \times [-r,r]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right]. \end{aligned}$$

Seja  $0 = (0, 0)$  a origem do plano  $\mathbb{R}^2$ . Sejam

$$D(0; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r\}$$

o disco de centro na origem e de raio  $r$  e o quadrado  $Q_r = [-r, r] \times [-r, r]$  de centro na origem. Valem as relações

$$D(0; r) \subset Q_r \subset D(0; 2r) \subset Q_{2r}.$$

Devido a tais relações, e a desigualdade  $e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$  em todo ponto  $(x, y)$ , temos

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \iint_{Q_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right] = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \iint_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right].$$

Donde segue

$$I^2 = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \iint_{D(0;r)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right].$$

Utilizando coordenadas polares escrevemos

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \text{com } \rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

O determinante da matriz jacobiana da aplicação  $J(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$  é

$$\det J(\rho, \theta) = \rho.$$

Então, efetuando tal mudança de coordenadas encontramos

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[ \iint_{[0,r] \times [0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \Big|_0^r \right) 2\pi = \pi \clubsuit \end{aligned}$$

**Exercício.** Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

satisfaz  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$  e é de classe  $C^\infty$  na reta.

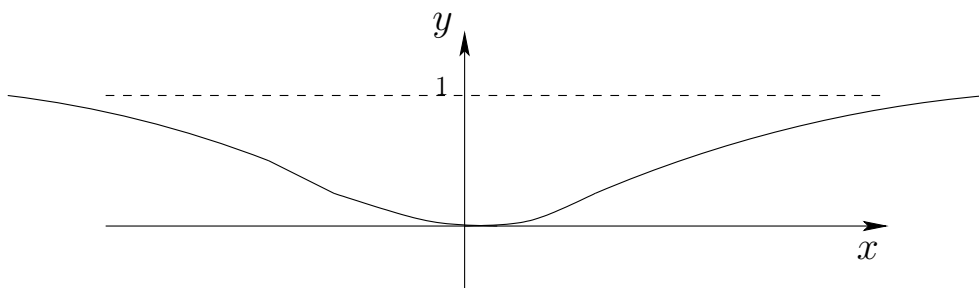


Figura 24: Gráfico de  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , se  $x \neq 0$ , com  $f(0) = 0$ .

**Sugestão.**

Por indução, as derivadas  $f^{(n)}$ , onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ , satisfazem

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} R_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ para todo } x \neq 0,$$

onde  $R_n(x)$  é uma função racional.

A seguir, adapte a prova apresentada no exemplo na seção *Uma Função  $C^\infty$  mas não Aproximável via Fórmula de Taylor*.

### Referências.

1. Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, segunda ed. (1977), Reverté.
2. Davies, R., *An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration*, *Mathematical Gazette*, 45 (1961) pp. 23–25.
3. Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol. 1., 5ª edição, LTC, 2001.
4. Hairer E. and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 2000.
5. Kestelman, H., *Change of variable in Riemann integration*, *Mathematical Gazette* 45 (1961), 351, pp 17–23.
6. Knapp, A. W., *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, 2005.
7. Lang, S., *Undergraduate Analysis*, second ed., Springer, China, 1997.
8. Lima, E. L., *Curso de Análise*, IMPA, 1976.
9. Lu, Jitan, *Is the composite function integrable?*, *Amer. Math. Monthly*, 106 (8), 1999, pp. 763–766.
10. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.
11. Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, 2008.
12. Spivak, M., *Calculus on Manifolds*, Perseus Book, 1965.