MAT 1352 - Cálculo II- IFUSP

Semestre 2 de 2023 - diurno

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

# Fundamentos de Análise Clássica. O Supremo, Teorema do Valor Intermediário, Teoremas de Bolzano e Weierstrass e a Integrabilidade das Funções Contínuas

O que é uma derivada? Resposta: um limite.
O que é uma integral? Resposta: um limite.
O que é uma série infinita? Resposta: um limite.
O que é então um limite? Resposta: um número.
Muito bem! O que é então um número? [1]

**Definição.** *Seja $X$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Então,*

- *O maior elemento de $X$, quando existe, é o* máximo *de $X$, indicado* $\max X$.
- *O menor elemento de $X$, quando existe, é o* mínimo *de $X$, indicado* $\min X$.
- *$M \in \mathbb{R}$ é um* majorante *de $X$ se ocorre $x \leq M$, para todo $x \in X$.*
- *$m \in \mathbb{R}$ é um* minorante *de $X$ se ocorre $m \leq x$, para todo $x \in X$.*

**Exemplo 1.** Consideremos os seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$(a)\ X = [0,1] \qquad (b)\ X = (0,1) \qquad (c)\ X = (-\infty,-2)$$

$$(d)\ X = (2,+\infty) \qquad (e)\ X = \mathbb{Q} \cap (0,7).$$

Analisando os casos $(a),(b),(c),(d)$ e $(e)$ acima, destacamos o que segue.

(a) Caso $X = [0,1]$. O mínimo de $X$ é $\min X = 0$, o máximo de $X$ é $\max X = 1$, o conjunto dos minorantes de $X$ é $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty,0]$ e o conjunto dos majorantes de $X$ é $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1,+\infty)$.

[1] Vide Analysis by Its History, E. Hairer and G. Wanner, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, N. Y., 2000, p. 168.

(b) Caso $X = (0,1)$. Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e o conjunto dos majorantes é $[1, +\infty)$.

(c) Caso $X = (-\infty, -2)$. Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto $X$ não admite minorante e, por fim, o conjunto dos majorantes é $[-2, +\infty)$.

(d) Caso $X = (0, +\infty)$. Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 2]$ e, por último, $X$ não admite majorante.

(e) Caso $X = \mathbb{Q} \cap (0,7)$. Não existe $\min X$, não existe $\max X$, o conjunto dos minorantes é $(-\infty, 0]$ e, finalmente , o conjunto dos majorantes é $[7, +\infty)$.

**Definição.** *Seja $X$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Então,*

- *O menor majorante de $X$, se existir, é o* supremo *de $X$, indicado $\sup X$. Isto é,*

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é majorante de } X\} .$$

- *O maior minorante de $X$, se existir, é o* ínfimo *de $X$, indicado $\inf X$. Isto é,*

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ é minorante de } X\} .$$

**Exemplo 2.** Consideremos os seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$:

$(a)$ $X = [0,1]$ $\quad$ $(b)$ $X = (0,1)$ $\quad$ $(c)$ $X = (-\infty, -2)$

$(d)$ $X = (2, +\infty)$ $\quad$ $(e)$ $X = \mathbb{Q} \cap (0,7)$.

Analizando cada um dos casos acima, segue o que encontramos para $X$.

(a) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.

(b) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.

(c) Não existe $\inf X$ e $\sup X = -2$.

(d) $\inf X = 2$ e não existe $\sup X$.

(e) $\inf X = 0$ e $\sup X = 7$.

**Definição.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então,*

- *$X$ é* limitado superiormente *se $X$ admite um majorante.*
- *$X$ é* limitado inferiormente *se $X$ admite um minorante.*

**Comentário.** A Propriedade do Supremo a seguir, enunciada por Bolzano[2] em 1817 (vide Jahnke [5, p.175]), é uma das mais fundamentais em matemática e é em alguns textos apresentada como um axioma [vide E. L. Lima] e em outros é provado como um teorema [vide H. L. Guidorizzi, Apêndice 6]. Neste texto apresentamos apenas seu enunciado e convidamos o leitor a consultar tais obras.

**Axioma (Propriedade) do Supremo.** *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.*

**Corolário (Propriedade de Aproximação).** *Seja $X$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $s = \sup X$. Se $a$ é real e $a < s$, então existe $x \in X$ tal que*

$$a < x \leq s \ .$$

**Prova.**

Como $s$ é um majorante de $X$, temos $x \leq s$, para todo $x \in X$. Assim, supondo que não exista $x$ em $X$ tal que $a < x \leq s$ temos $x \leq a$, para todo $x \in X$, e portanto $a$ é um majorante de $X$ e $a < s$ $\lightning$

Analogamente à Propriedade do Supremo e seu corolário temos,

**Propriedade do Ínfimo.** *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo.*

**Prova.**

Se $X$ é o conjunto em questão, basta aplicar a Propriedade do Supremo ao conjunto $-X = \{-x : x \in X\}$ $\clubsuit$

Seguem algumas das principais consequências da Propriedade do Supremo.

[2]B. Bolzano (1781-1848), padre tcheco, viveu em Praga e teve sua obra redescoberta e reconhecida postumamente em 1870.

**Propriedade de Arquimedes.** *Seja $x > 0$ e $y$ um número real. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.*

**Prova.**

Suponhamos, por absurdo, que $nx \leq y$ para todo natural $n$. Então, o conjunto

$$X = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

é obviamente não-vazio e majorado por $y$ e assim, pela Propriedade do Supremo, admite supremo. Seja $s = \sup X$. Notando que $x > 0$, o supremo é o menor dos majorantes e $s - x < s$, segue que $s - x$ não é um majorante de $X$ e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$, o que implica $s < (m+1)x$ e $(m+1)x \in X$ $\lightning$

**Corolário 1.** *O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.*

**Prova.**

Dado $x \in \mathbb{R}$, pela propriedade de Arquimedes e como $1 > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = n.1 > x$♣

**Corolário 2 (Não há infinitésimos em $\mathbb{R}$).** *Para todo $x > 0$, existe um natural $n$ tal que*

$$\frac{1}{n} < x.$$

**Prova.**

Como $x > 0$, pela propriedade arquimediana segue que existe um número $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $nx > 1$ e portanto

$$\frac{1}{n} < x \clubsuit$$

**Teorema do Anulamento (Bolzano-Weierstrass) (1817).**[3] *Se* $f;[a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua e* $f(a) < 0 < f(b)$, *então existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f(c) = 0$.

**Prova.**

O conjunto

$$X = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$

é tal que $a \in X$ e é limitado superiormente por $b$. Logo, pela Propriedade do Supremo, existe $c = \sup X$ e $a \leq c \leq b$.

Mostremos, aplicando o teorema da conservação do sinal à função contínua $f$, que tanto $f(c) < 0$ como $f(c) > 0$ acarretam contradições.

Se $f(c) < 0$ temos $c < b$ e $f < 0$ em algum intervalo $[c, c+\delta) \subset [a,b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Consequentemente, temos que existe um ponto $x \in [a,b]$ tal que $x > c$ e $f(x) < 0 \lightning$

Se $f(c) > 0$ temos $a < c$ e $f > 0$ em algum intervalo $(c-\delta, c] \subset [a,b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Porém, pela propriedade de aproximação, existe $x \in (c-\delta, c]$ tal que $f(x) < 0 \lightning$

**Teorema do Valor Intermediário.** *Se* $f$ *é contínua em* $[a,b]$ *e* $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ *então, existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f(c) = \gamma$.

**Prova.**

Se $f(a) < \gamma < f(b)$, aplicamos o teorema de Bolzano-Weierstrass à função $g(x) = f(x) - \gamma \clubsuit$

**Definições.** *Uma* sequência *em* $\mathbb{R}$ *é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *indicada* $x = (x_n)$, *com* $x_n = x(n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Escrevemos então,* $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ *e ainda,* $(x_n) = (x_n)_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Ainda mais,*

- *Se* $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$, *então* $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ *é uma* subsequência *da sequência* $(x_n)$.
- $(x_n)$ *é uma* sequência crescente [descrescente] *se* $x_n \geq x_m$ $[x_n \leq x_m]$ *para todo* $n \geq m$, *onde* $n$ *e* $m$ *pertencem a* $\mathbb{N}$.

Notemos que toda subsequência é uma sequência.

[3] Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

**Exemplos 3.** Temos, em $\mathbb{R}$, os exemplos abaixo de sequências e subsequências.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (1, 2, 3, \ldots)$ é a sequência estritamente crescente dos naturais.

- Se $y_n = 2n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(y_n)$ é a subsequência dos pares da sequência dos naturais.

- Se $r \in \mathbb{R}$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(s_n)$ é a sequência das somas finitas das progressões geométricas de razão $r$, de 1 a $r^n$.

- Se $x_n = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

  é a sequência dos inversos dos naturais.

- Se $x_n = \sqrt[n]{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então $(x_{2n+1}) = (\sqrt[2n+1]{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência da sequência $(\sqrt[n]{n})$.

**Lema.** *Toda sequência $(x_n)$ admite ou uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente.*

**Prova.**

Chamemos $n$ de um "ponto de pico" da sequência $(x_n)$ se ocorre $x_m < x_n$ para todo $m > n$.

- ⋄ Se $(x_n)$ tem uma quantidade infinita de pontos de pico, $\{n_1 < n_2 < \cdots\}$, então a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente pois temos

$$x_{n_1} > x_{n_2} > \cdots.$$

- ⋄ Se $(x_n)$ tem uma quantidade finita de pontos de pico, seja $n_1$ um natural estritamente maior que todos os pontos de pico de $(x_n)$. Como $n_1$ não é um ponto de pico então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, como $n_2$ também não é ponto de pico segue que existe $n_3 > n_2$, $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Iterando, obtemos uma subsequência crescente da sequência $(x_n)$♣

**Definições.** *Seja* $(x_n)$ *uma sequência em* $\mathbb{R}$. *Dizemos que a sequência* $(x_n)$

- converge a $L \in \mathbb{R}$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0$ *tal que* $|x_n - L| < \epsilon$ *se* $n \geq n_0$. *Temos então a notação*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L.$$

- diverge a $+\infty$ *se para todo* $M \in \mathbb{R}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > M$ *se* $n \geq n_0$. *Utilizamos então a notação*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty.$$

- diverge a $-\infty$ *se para todo* $M \in \mathbb{R}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n < M$ *se* $n \geq n_0$. *Utilizamos então a notação*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty.$$

- diverge *se não existe* $L \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{n \to +\infty} x_n = L$.

**Exemplos 4.** Seguem exemplos de sequências convergentes e divergentes.

- Se $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty.$$

- Se $|r| < 1$ e $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, onde $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1-r}.$$

- Se $x_n = 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

- Se

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

então segue

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Propriedade.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \varnothing$ e limitado. Seja $\alpha = \sup X$. Então, existe uma sequência crescente $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ contida em $X$ e tal que*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha.$$

**Prova.**

- O caso $\alpha \in X$. Basta a sequência constante $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha$, etc.
- O caso $\alpha \notin X$. Então, utilizemos que dado $n \in \mathbb{N}$ temos
$$\alpha - \frac{1}{n} < \alpha.$$
Logo, $\alpha - 1/n$ não é um majorante de $X$ e portanto existe $x_n \in X$ satisfazendo
$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n < \alpha.$$
É claro que temos
$$0 \leq \alpha - x_n \leq \frac{1}{n}$$
e que portanto a sequência $(x_n)_{\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ converge a $\alpha$. Entretanto, não temos a garantia que a sequência $(x_n)_{\mathbb{N}}$ seja crescente.

  Façamos então o seguinte. Para cada $n$, consideremos
$$y_n = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$
É óbvio que $y_n \in X$ para cada $n$, pois $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ está contido em $X$.

  É evidente que $y_n \leq y_{n+1}$ para cada $n$.

  É claro que $x_n \leq y_n$ para cada $n$.

  É trivial ver que
$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq y_n < \alpha, \text{ para cada } n.$$
Consequentemente temos
$$0 \leq \alpha - y_n \leq \frac{1}{n}, \text{ para cada } n.$$
Portanto, $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ é uma sequência crescente em $X$ e satisfaz
$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \alpha \clubsuit$$

**Lema.** *Se $(x_n)$ é crescente [decrescente] e limitada então $(x_n)$ é convergente.*
**Prova.**

Como $(-x_n)$ é crescente se $(x_n)$ é decrescente, basta supormos $(x_n)$ crescente. Então, pela propriedade do supremo segue que existe

$$\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \le \alpha$. Então, como $(x_n)$ é crescente, para todo $n \ge n_0$ temos $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \le x_n \le \alpha$, o que implica $|x_n - \alpha| < \epsilon$ se $n \ge n_0$♣

**Teorema.** *Toda sequência limitada admite ao menos uma subsequência convergente.*
**Prova.** Segue dos dois lemas anteriores ♣

**Definição.** A sequência $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é dita **de Cauchy** se para todo $\epsilon > 0$ existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|x_n - x_m| < \epsilon, \text{ para quaisquer } n, m \ge n_0.$$

O resultado a seguir é um dos mais importantes da Análise Matemática.

**Teorema.** *Seja $(x_n)$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Então, $(x_n)$ é convergente se e somente se $(x_n)$ é de Cauchy.*

**Prova.**

($\Rightarrow$) Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = x$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ para todo } n \ge n_0.$$

Logo, para todo $n \ge n$ e todo $m \ge n_0$ temos

$$|x_n - x| < \epsilon \text{ e } |x_m - x| < \epsilon,$$

e então

$$|x_n - x_m| \le |x_n - x| + |x_m - x| < 2\epsilon.$$

($\Leftarrow$) Dado $\epsilon = 1$, existe $n_0$ tal que temos

$$|x_n - x_m| < 1, \text{ para quaisquer } n \geq n_0 \text{ e } m \geq n_0.$$

Donde segue

$$|x_n - x_{n_0}| < 1, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Isto mostra que a sequência $(x_n)$ é limitada.

Então, pelo teorema imediatamente anterior, a sequência $(x_n)$ tem uma subsequência $(x_{n_k})$ que é convergente a um real $x$.

Mostremos que a sequência $(x_n)$ converge a $x$. Consideremos um arbitrário $\epsilon > 0$. Então, existe um índice $k_0$ tal que temos

$$|x_{n_k} - x| < \epsilon \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Por hipótese, $(x_n)$ é de Cauchy. Logo, existe também um índice $n_0$ tal que temos

$$|x_n - x_m| < \epsilon \text{ para todos } n \geq n_0 \text{ e } m \geq n_0.$$

Consideremos $k^* \in \mathbb{N}$ tal que $k^* > k_0$ e $n_{k*} > n_0$. Então, para todo $n > n_{k*}$ temos

$$|x_n - x_{n_{k*}}| < \epsilon \quad \text{com } |x_{n_{k*}} - x| < \epsilon.$$

Donde segue

$$|x_n - x| < 2\epsilon, \text{ para todo } n > n_{k*}.$$

Isto mostra que $(x_n)$ é convergente (converge a $x$) ♣

**Proposição.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e $(x_n)$ é uma sequência contida em $X$ e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge a $f(x_0)$.*

**Prova.**

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ e então obtemos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$♣

**Teorema da Limitação.** *Se $f$ é contínua em $[a,b]$ então $f$ é limitada.*

**Prova.** Por contradição e utilizando o *"Argumento da Bisecção"* (de Bolzano).

Bisectando[4] $I_1 = [a,b]$, seja $I_2$ um dos subintervalos

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

em que $f$ não é limitada (existe ao menos um). Repetindo o argumento, bisectamos $I_2$ e selecionamos $I_3$ um subintervalo desta bisecção, no qual $f$ não é limitada. Iterando tal processo obtemos uma sequência de intervalos encaixantes $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da forma $I_n = [x_n, y_n]$, com $I_{n+1} \subset I_n$, satisfazendo

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

A sequência $(x_n)$ é crescente e a sequência $(y_n)$ é decrescente, ambas contidas em $[a,b]$. Temos $x_n \leq y_m$ quaisquer que sejam $n$ e $m$ em $\mathbb{N}$ [se $m \leq n$ temos $x_n \leq y_n \leq y_m$ e, se $m \geq n$, $x_n \leq x_m \leq y_m$]. Pelas propriedades do supremo e do ínfimo, segue que $(x_n)$ converge a $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $(y_n)$ converge a $y = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, ainda, $x_n \leq x \leq y \leq y_n$ [pois temos $x_n \leq y_m$, quaisquer que sejam $n$ e $m$ em $\mathbb{N}$, e fixando um arbitrário $m \in \mathbb{N}$ da definição de supremo segue $x \leq y_m$, para $m$ arbitrário, e da definição de ínfimo segue $x \leq y \leq y_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$]. Desta forma temos

$$0 \leq y - x \leq \frac{b-a}{2^n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e portanto, como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

pelo teorema do confronto segue $y - x = 0$ e $x = y$.

Como $f$ é contínua, existe um intervalo $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, em que $f$ é limitada. Porém, tal intervalo contém algum intervalo $I_n$ no qual $f$ é não limitada $\lightning$

[4] Raciocícios por bisecção foram muito utilizados por Bolzano e também se encontram em Elementos, Euclides, Livro X.

**Teorema de Weierstrass.** *Se $f$ é contínua em $[a,b]$ então existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \text{ para todo} x \in [a,b].$$

**Prova.**

Por hipótese, o conjunto

$$X = \{f(x); x \in [a,b]\} = f([a,b])$$

é limitado. Assim, pelas propriedades do supremo e do ínfimo existem

$$M = \sup X \text{ e } m = \inf X.$$

Mostremos que $M \in f([a,b])$ (a prova para $m$ é análoga).

Se $f(x) < M$, para todo $x \in [a,b]$, então temos

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \text{ para todo } x \in [a,b],$$

e $g$ é contínua. Pelo teorema da limitação segue que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta.$$

Donde segue

$$M - f(x) > \frac{1}{\beta},$$

o que implica

$$f(x) < M - \frac{1}{\beta} \text{ para todo } x \in [a,b].$$

Sendo assim, $M$ não é supremo de $X$↯

## Integração de Funções Contínuas.

Para provarmos que funções contínuas em $[a,b]$ são integráveis, recordemos a definição de integral.

**Definição.** *Dada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *uma* partição

$$P = \{x_0 = a \le x_1 \le \cdots \le x_n = b\} \text{ de } [a,b]$$

*e uma* escolha

$$\mathcal{E} = \{c_i : c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{para todo } i = 1, \ldots, n\}$$

*subordinada à partição* $P$, *a* soma de Riemann *de* $f$ *em relação à partição* $P$ *e à escolha* $\mathcal{E}$ *é*

$$S(f;P;\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,, \quad \text{com} \quad \Delta x_i = (x_i - x_{i-1}).$$

*A* norma *de* $P$ *é*

$$|P| = \max\{\Delta x_i : 1 \le i \le n\}$$

e $[x_{i-1}, x_i]$, *onde* $1 \le i \le n$, *é um subintervalo determinado por* $P$.

**Definição.** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, dizemos que $f$ é Riemann-integrável, ou simplesmente integrável, se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo: para toda partição $P$ de $[a,b]$ com norma $|P| < \delta$, para qualquer que seja a escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição $P$ temos

$$\Big| S(f;P;\mathcal{E}) - L \Big| \;<\; \epsilon\,.$$

**Notações.** Escrevemos então,

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L \quad \text{e}$$

$$L = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

O número $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamado de integral de $f$ em $[a,b]$.

No que segue mantemos a notação acima. Se $f$ é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass $f$ é limitada em $[a,b]$ e podemos introduzir os conceitos a seguir.

**Definição.** *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e $P=\{a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=b\}$ é uma partição de $[a,b]$, a* soma inferior *e a* soma superior[5] *de $f$ em relação à partição $P$ são, respectivamente,*

$$\underline{S}(f;P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\,,\quad m_i=\min\{\,f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\,\}\quad e$$

$$\overline{S}(f;P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\,,\quad M_i=\min\{\,f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\,\}.$$

A seguir, utilizando uma idéia que remonta a Arquimedes, mostraremos que o existem o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que $f$ é integrável.

**Notação.** Dado $A\subset[a,b]$, definimos

$$\min_A f=\min\{f(x):x\in A\}\quad\text{e}\quad\max_A f=\max\{f(x):x\in A\}.$$

**Observação 1.** *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Valem as propriedades abaixo.*

*(a) Se $I$ e $J$ são subintervalos de $[a,b]$ e $I\subset J$, então*

$$\min_J f\le\min_I f\le\max_I f\le\max_J f.$$

*(b) Se $P_1$ e $P_2$ são partições de $[a,b]$ então, ordenando $P_1\cup P_2$ temos que $P_1\cup P_2$ é também uma partição de $[a,b]$.*

*(c) Se $P_1$ e $P_2$ são partições de $[a,b]$ então*

$$\underline{S}(f;P_1)\le\underline{S}(f;P_1\cup P_2)\le\overline{S}(f;P_1\cup P_2)\le\overline{S}(f;P_2).$$

[5] Estes conceitos foram introduzidos pelo matemático francês G. Darboux (1842-1917)

(d) *Se $P$ é uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{E}$ é uma escolha qualquer subordinada à partição $P$ então,*

$$\underline{S}(f;P) \leq S(f;P;\mathcal{E}) \leq \overline{S}(f;P).$$

**Prova.**

(a) Trivial.

(b) Óbvio.

(c) Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,n$, é um subintervalo determinado pela partição $P_1$ então $I_i$ é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, para $j = 1, \dots, N$ e $N \geq n$, determinados pela partição $P_1 \cup P_2$ que estão contidos em $I_i$. Desta forma, pelo item (a) temos,

$$\left(\min_{I_i} f\right) \Delta x_i \;=\; \left(\min_{I_i} f\right) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j \;\leq\; \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \left(\min_{J_j} f\right) \Delta y_j \quad \text{e}$$

e

$$\sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \left(\max_{J_j} f\right) \Delta y_j \;\leq\; \left(\max_{I_i} f\right) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j = \left(\max_{I_i} f\right) \Delta x_i.$$

Então, destacando o primeiro e o terceiro termos das equações acima e somando para $i = 1, \dots, n$ obtemos

$$\underline{S}(f;P_1) \leq \underline{S}(f;P_1 \cup P_2) \quad \text{e} \quad \overline{S}(f;P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f;P_1)$$

e, por analogia,

$$\overline{S}(f;P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f;P_2).$$

Como temos

$$\underline{S}(f;P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f;P_1 \cup P_2),$$

completamos assim a prova de (c).

(d) Evidente♣

**Proposição.** *Se $f$ é contínua em $[a,b]$ então existem*

$$\begin{cases} \alpha = \sup\{\underline{S}(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b]\} \\ e \\ \beta = \inf\left\{\overline{S}(f;P) : P \text{ é partição de } [a,b]\right\} \end{cases}$$

*e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.*

**Prova.**

Sejam $P_1$ e $P_2$ duas partições arbitrárias de $[a,b]$. Pela Observação 1(c) segue

$$\underline{S}(f;P_1) \leq \overline{S}(f;P_2).$$

Assim, fixo $P_2$ o conjunto

$$\{\underline{S}(f;P_1) : P_1 \text{ é partição de } [a,b]\}$$

é não vazio e majorado por $\overline{S}(f;P_2)$. Logo, temos $\alpha \leq \overline{S}(f;P_2)$ e, como esta desigualdade é válida para toda partição $P_2$ de $[a,b]$ segue que $\alpha$ é um minorante do conjunto

$$\left\{\overline{S}(f;P_2) : P_2 \text{ é partição de } [a,b]\right\}$$

e portanto concluímos $\alpha \leq \beta$♣

**Proposição.** *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e $(x_n)$ é uma sequência contida em $X$ e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge a $f(x_0)$.*

**Prova.**

Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0,$$

segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que temos $|x_n - x_0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Sendo assim, temos $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$♣

**Definição.** *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, é* uniformemente contínua *se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\text{se}\, x\,,y \in X \text{ então}: \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

**Teorema (Heine, 1872).**[6] *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então $f$ é uniformemente contínua.*

**Prova.** Por contradição.

Suponhamos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta = 1/n$, onde $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n$ e $y_n$ em $[a,b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \text{ e } \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Sendo limitada, $(x_n)$ admite subsequência convergente $(x_{n_k})$ e reenumerando esta se necessário supomos, sem perda de generalidade, $(x_n)$ convergente a $x$. Notemos que como temos $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então segue $x \in [a,b]$. Ainda mais, como

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos que a sequência $(y_n)$ também converge a $x$. Concluímos então que

$$0 = \lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0 \ \lightning$$

**Teorema.** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então $f$ é integrável.*

**Prova.**

Dado $\epsilon > 0$, como $f$ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Seja $P = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$ com norma

$$|P| = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i < \delta.$$

[6] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.

Sejam

$$m_i = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Temos

$$0 \le \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon.$$

Como

$$\underline{S}(f;P) \le \alpha \le \beta \le \overline{S}(f;P),$$

onde $\alpha$ é o supremo do conjunto das somas inferiores de $f$ e $\beta$ é o ínfimo do conjunto das somas superiores de $f$, ambas relativas às partições de $[a,b]$, temos

$$0 \le \beta - \alpha \le \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \epsilon$$

e, como $\epsilon$ é arbitrário, $\alpha = \beta$. Seja $L = \alpha$. Se $\mathcal{E}$ é uma escolha qualquer relativa a $P$, pela Observação 1(d) temos

$$S(f;P;\mathcal{E}) \le \overline{S}(f;P) = \underline{S}(f;P) + [\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)] < \alpha + \epsilon = L + \epsilon \quad \text{e}$$

$$L - \epsilon = \beta - \epsilon < \overline{S}(f;P) - [\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)] = \underline{S}(f;P) \le S(f;P;\mathcal{E}).$$

Donde segue

$$L - \epsilon < S(f;P;\mathcal{E}) < L + \epsilon,$$

para toda partição $P$ tal que $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha $\mathcal{E}$ relativa à partição $P$. Logo, $f$ é integrável e a integral de $f$ é $L = \alpha = \beta$.

Isto é, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sup\{\underline{S}(f;P) :\ P \text{ é partição de } [a,b]\} \\ &= \inf\left\{\overline{S}(f;P) :\ P \text{ é partição de } [a,b]\right\} \clubsuit \end{aligned}$$

**Referências.**


1. Doxiadis, A., Dimitriou, C., Papadatos, A. et Di Donna, A., *Logicomix*, seconde édition, Vuibert, 2022 (french).

2. Fitzpatrick, P. M., *Advanced Calculus*, Pure and Applied Undergrad. Texts, 2nd. ed., AMS, 2009.

3. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, Vol 1, 5ª edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.

4. Hairer, E. and Wanner, G., Analysis by Its History, UTM, Springer, New York, 1996.

5. Jahnke, H. N., editor, A History of Analysis, American Mathematical Society, 2003.

6. Lima, E. L., Curso de Análise, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

7. Spivak, M., Calculus, 4th edition, Publish or Perish, Inc., Houston, 2008.