Prova P3 de MAT1351 - Cálculo I para Licenciatura (diurno) - IFUSP
3/07/2017 - Primeiro semestre de 2017

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens. Boa Sorte!

1. Determine a equação de uma reta T que é tangente aos gráficos de

$$f(x) = -x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2} + x^2.$$

[Note: a mesma reta T tangencia o gráfico de f e também o gráfico de g.]
Solução.

◇ Seja

$$T : y - f(p) = f'(p)(x - p)$$

uma arbitrária reta tangente ao gráfico de f. Analogamente, seja

$$S : y - g(q) = g'(q)(x - q)$$

uma arbitrária reta tangente ao gráfico de g. Temos então

$$T : y + p^2 = -2p(x - p) \qquad \text{e} \qquad S : y - \frac{1}{2} - q^2 = 2q(x - q).$$

Impondo $T = S$, seus coeficiente angulares são iguais. Logo, $q = -p$. Obtemos as seguintes equações para T e S, respectivamente,

$$y = -2p(x - p) - p^2 \qquad \text{e} \qquad y = -2p(x + p) + \frac{1}{2} + p^2.$$

Donde segue, substituindo $x = 0$ em uma e na outra, a equação

$$p^2 = -p^2 + \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$2p^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow p = \pm\frac{1}{2}.$$

Encontramos então duas retas tangentes (uma já nos é suficiente):

$$\begin{cases} T_1 : y - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{2}, \\ T_2 : y - \frac{1}{4} = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \clubsuit \end{cases}$$

2. Esboce o gráfico da função
$$y = \frac{x^4+1}{x^2}.$$

Solução.

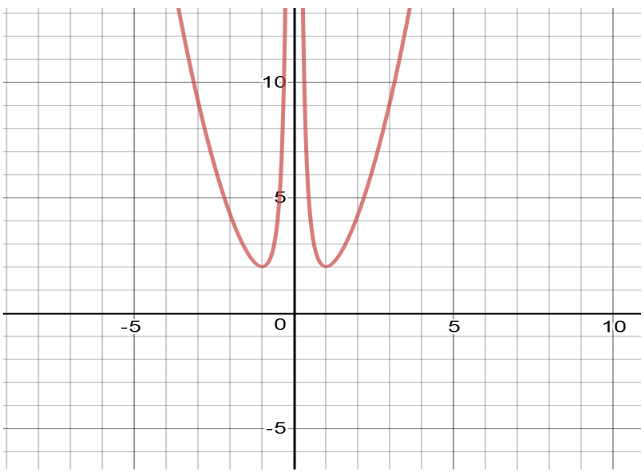
◇ O domínio da função **par** $y = f(x)$ é $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Basta esboçar o gráfico de f sobre o semi-eixo $(0, +\infty)$ e refleti-lo em relação ao eixo Oy.

◇ Temos
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$
Não há ponto de máximo global.

◇ A derivada de f é
$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^4-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^4-1).$$
Segue $f' < 0$ em $(0,1)$, $f' = 0$ em $x = 1$ e $f' > 0$ em $(1, +\infty)$. Assim, f é estritamente decrescente em $(0,1)$ e estritamente crescente em $(1,+\infty)$. Logo, $x = 1$ [e $x = -1$] é ponto de mínimo global. O valor mínimo global é
$$f(1) = 2 \text{ [e } 2 = f(-1)].$$

◇ A segunda derivada de f é
$$f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$
Logo, a concavidade de f é voltada para cima em $(0, +\infty)$ [e em $(-\infty, 0)$]. Não há ponto de inflexão.

◇ O eixo Oy é uma assíntota vertical ao gráfico de f.
Não existe assíntota horizontal ao gráfico de f.



3. Estude a função f com relação a máximo e mínimos locais e globais:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3 - 2x^2}, \quad x \in [-4, 4].$$

Solução.

- $\diamond$ A quíntica $x \mapsto x^5$ é uma bijeção estritamente crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Portanto, o mesmo vale para sua inversa $x \mapsto \sqrt[5]{x}$.
- $\diamond$ Assim, os pontos de mínimo e de máximo (locais, globais) de $f(x)$ são respectivamente pontos de mínimo e de máximo (locais, globais) de

$$g(x) = x^3 - 2x^2, \ x \in [-4, 4].$$

- $\diamond$ Os pontos críticos de g são dados por

$$0 = g'(p) = 3p^2 - 4p = p(3p-4) \Longrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ \text{ou} \\ p = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

- $\diamond$ A segunda derivada de g nos pontos críticos é $g''(p) = 6p - 4$. Temos

$$g''(0) < 0 \quad \text{e} \quad g''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0.$$

Logo,

$$\boxed{\begin{cases} p = 0 \text{ é ponto de máximo local de } f \\ \text{e} \\ p = \frac{4}{3} \text{ é ponto de mínimo local de } f. \end{cases}}$$

- $\diamond$ Os candidatos a pontos de mínimo/máximo (locais/globais) de g e de f são

$$\left\{-4, 0, \frac{4}{3}, 4\right\}.$$

- $\diamond$ Temos

$$f(-4) = -\sqrt[5]{96} \quad f(0) = 0 \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt[5]{\frac{64}{27} - \frac{32}{9}} = -\sqrt[5]{\frac{32}{27}} \quad f(4) = 2.$$

- $\diamond$ Portanto,

$$\boxed{\begin{cases} p = -4 \text{ é ponto de mínimo global de } f \text{ e } f(-4) = -\sqrt[5]{96} \\ \text{e} \\ p = 4 \text{ é ponto de máximo absoluto de } f \text{ e } f(4) = 2. \end{cases}}$$ ♣

4. Determine uma reta T que seja paralela à reta

$$r : x + y = 1$$

e tangente à curva

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

Solução.

- $\diamond$ Suponhamos a curva dada por $y = y(x)$. Temos

$$x^2 + xy(x) + y(x)^2 = 3 \quad \text{para todo } x.$$

- $\diamond$ Seja $(p, y(p))$ o ponto desta curva com tangente T paralela à reta r. Segue

$$T : y - y(p) = y'(p)(x - p), \quad m_T = m_r \quad \text{e} \quad y'(p) = -1.$$

- $\diamond$ Derivando implicitamente a equação para a curva $y = y(x)$ obtemos

$$2x + y(x) + xy'(x) + 2y(x)y'(x) = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Substituindo $x = p$ e $y'(p) = -1$ nesta última equação obtemos

$$2p + y(p) - p - 2y(p) = 0.$$

Donde segue $p - y(p) = 0$. Isto é,

$$y(p) = p.$$

Substituindo $x = p$ [e então $y(p) = p$] na equação para a curva $y = y(x)$ obtemos uma equação do segundo grau na indeterminada p. Isto é,

$$p^2 + p^2 + p^2 = 3 \Longrightarrow 3p^2 = 3 \Longrightarrow p = \pm 1.$$

- $\diamond$ Encontramos então duas soluções. A saber,

$$\boxed{\begin{cases} T_1 : y - 1 = -(x - 1) \\ \text{e} \\ T_2 : y + 1 = -(x + 1). \end{cases}} \quad \text{ou, ainda,} \quad \boxed{\begin{cases} T_1 : x + y = 2 \\ \text{e} \\ T_2 : x + y = -2. \end{cases}}$$