Prova P2 de MAT1351 - Cálculo I para Licenciatura (diurno) - IFUSP
31/05/2017 - Segundo semestre de 2015

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________ GABARITO ____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens. Boa Sorte!

1. Simplifique a expressão abaixo, pelo método de frações parciais.

$$R(x) = \frac{x^2}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}.$$

Primeira Solução.

◇ Temos

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 &= (x-2)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \\ &= (x-2)(x-2)(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^4. \end{aligned}$$

◇ Segue

$$R(x)\frac{x^2}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4}.$$

Donde segue

$$x^2 = A(x-2)^3 + B(x-2)^2 + C(x-2) + D.$$

Encontramos então

$$\begin{cases} D = 2^2 = 4 \\ C = \frac{d(x^2)}{dx}\Big|_{x=2} = (x^2)'(2) = 2x\Big|_{x=2} = 4 \\ 2B = \frac{d^2(x^2)}{dx^2}\Big|_{x=2} = (x^2)''(2) = 2\Big|_{x=2} = 2 \text{ e } B = 1 \\ 6A = \frac{d^3(x^2)}{dx^3}\Big|_{x=2} = (x^2)'''(2) = 0 \text{ e } A = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{R(x) = \frac{0}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^4} \clubsuit}$$

◇ **Segunda Solução.** Neste problema, é trivial ver que

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{x^2}{(x-2)^4} &= \frac{[(x-2)+2]^2}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)^2 + 4(x-2) + 4}{(x-2)^4} \\ &= \frac{0}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^4} \clubsuit \end{aligned}$$

2. Determine todos os pontos $P = (a, b)$ do plano $\mathbb{R}^2$ tais que por $P = (a, b)$ passem duas retas tangentes ao gráfico da função

$$f(x) = x^2.$$

Solução.

- ◇ A equação geral das restas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$ é

$$T : y - f(p) = f'(p)(x - p).$$

Isto é,

$$T : y - p^2 = 2p(x - p).$$

- ◇ A reta tangente T passa pelo ponto (a, b) se e só se está satisfeita a equação

$$b - p^2 = 2p(a - p).$$

Consideremos tal equação na variável p.

- ◇ Para que existam duas retas tangentes passando pelo ponto (a, b) é necessário que existam duas soluções distintas (na variável p) para tal equação. Tal equação é do segundo grau na variável p. Reescrevamo-la como

$$b - p^2 = 2ap - 2p^2.$$

Isto é,

$$p^2 - 2ap + b = 0.$$

Completando quadrado encontramos

$$(p - a)^2 - a^2 + b = 0.$$

Donde segue

$$(p - a)^2 = a^2 - b.$$

Esta equação tem duas soluções distintas se e somente se

$$a^2 - b > 0.$$

Isto é, se e somente

$$b < a^2.$$

O conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b < a^2\}$$

é a região do plano que está **abaixo do gráfico da parábola** $y = x^2$ ♣

3. Compute os limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^{3x+5}$.

Solução.

(a) Tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Podemos supor $x>0$. Escrevamos

$$\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x+5} = \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right)^{3x+5}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}}.\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}}$$

$$= \frac{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^9}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^6} \; \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}}.$$

Pelo terceiro limite fundamental

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

encontramos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^9}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^6} \; \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}} = \frac{e^9}{e^6}.\frac{1^5}{1^5} = e^3.$$

Respostas.

$$(a) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

$$(b) \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x+5} = e^3 \clubsuit$$

4. Calcule $f'(x)$ com:

$$(a) \quad f(x) = \left(4x^3 + 3x^2 + 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \ln x.$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{e^x.\cos x}{x^2+1}.$$

Solução.

(a) Tem-se

$$f'(x) = \left(12x^2 + 6x + 2 - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) \ln x + \left(4x^3 + 3x^2 + 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{1}{x}.$$

(b) Tem-se

$$f'(x) = \frac{(e^x \cos x - e^x \sin x)(x^2+1) - (e^x \cos x)2x}{(x^2+1)^2} \clubsuit$$