Prova P1 de MAT1351 - Cálculo I
Licenciatura em Física (diurno) - IFUSP
17 de abril - primeiro semestre de 2017

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________
N$^{\underline{o}}$USP : ______________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É necessário justificar todas as passagens. Boa Sorte!

1. Simplifique a função racional abaixo, pelo método de frações parciais.

$$R(x) = \frac{x^2+x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$$

Solução.

◇ Fatorando o denominador encontramos

$$\frac{x^2+x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Existem constantes reais A, B, C e D tais que

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \text{ para todo } x \neq 1.$$

◇ Pelo método de Heaviside encontramos

$$\frac{1^2+1}{1^2+1} = B \text{ e } \boxed{B=1}.$$

◇ Segue

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

◇ Substituindo $x=0$ obtemos

$$0 = -A+1+D \text{ e então } \boxed{D = A-1}.$$

◇ Substituindo $x=-1$ obtemos

$$0 = -\frac{A}{2} + \frac{1}{4} - \frac{C}{2} + \frac{D}{2} \Longrightarrow 0 = -\frac{A}{2} + \frac{1}{4} - \frac{C}{2} + \frac{A-1}{2} \Longrightarrow \boxed{C = -\tfrac{1}{2}}.$$

◇ Segue

$$\frac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{\frac{x}{2}-D}{x^2+1}.$$

◇ Substituindo $x=2$ encontramos

$$\frac{6}{5} = A+1-\frac{1-D}{5} \Longrightarrow \frac{6}{5} = A+1-\frac{1-(A-1)}{5} \Longrightarrow 6 = 5A+5+A-2 \Longrightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{2}}.$$

RESPOSTA: $$\frac{x^2+x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-(x/2)-1/2}{x^2+1}.$$

2. Esboce as regiões no plano cartesiano definidas pelas respectivas desigualdades:

   a) $A = \Big\{(x, y) : x \leq 0,\ \ y \geq 1,\ \ x - 2y + 4 \geq 0,\ \ x - 3y + 4 \geq 0,\ \ x + y - 7 \leq 0\Big\}.$

   b) $B = \{(x, y) : y^2 + 4x + 6y + 8 < 0\}.$

3. Compute os limites

$$(a) \qquad \lim_{t \to 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2}$$

$$(b) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{h}$$

Solução.

(a) Temos

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 - 4)(t^2 + 4)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} (t+2)(t^2+4).$$

Como

$$\lim_{t \to 2} (t+2) = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 2} (t^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8,$$

segue

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2} = \lim_{t \to 2} (t+2)(t^2+4) = 4.8 = \boxed{32}.$$

(b) Seja $k = \sqrt[3]{h+1}$. Então temos $k^3 = h + 1$ e $h = k^3 - 1$. Logo,

$$h \to 0 \text{ se e somente se } k \to 1.$$

Segue

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{h} = \lim_{k \to 1} \frac{k - 1}{k^3 - 1}$$

$$= \lim_{k \to 1} \frac{k - 1}{(k-1)(k^2 + k + 1)}$$

$$= \lim_{k \to 1} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{1^2 + 1 + 1} = \boxed{\tfrac{1}{3}}.$$

4. Simplifique a função racional abaixo, pelo método de frações parciais,

$$R(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

Solução.

◇ Existem constantes reais A, B, C, D e E tais que

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

◇ Tirando o m.m.c [i.e., multiplique por $(x+1)(x^2+1)^2$] segue

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)$$

$$= (A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+(A+C+E)$$

◇ Por outro lado, pelo método de Heaviside encontramos

$$\frac{1}{[(-1)^2+1]^2} = A \Longrightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{4}}.$$

◇ Pelo **Princípio de Identidade Polinomial** seguem

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ B+C+D+E=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=-B \\ D=-2A \\ E=-D \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} B = -\frac{1}{4} \\ \\ C = \ \ \frac{1}{4} \\ \\ D = -\frac{1}{2} \\ \\ E = \ \ \frac{1}{2} \end{array}}.$$

◇ **RESPOSTA:**

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1/4}{x+1} + \frac{(-x/4)+1/4}{x^2+1} + \frac{(-x/2)+1/2}{(x^2+1)^2}.$$