MAT 1351 - Cálculo I - Licenciatura em Física- IFUSP
Semestre 1 de 2017 - diurno
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

TEOREMAS SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

É intuitivo que para analisarmos uma função f numa vizinhança de um ponto p não é necessário que p pertença ao domínio de f mas sim que próximo a p existam infinitos pontos do domínio da função. Introduzimos a definição abaixo.

Notação. Dados dois conjuntos A e B a diferença de conjuntos "A menos B" é

$$A \setminus B = \{a \in A : \ a \notin B\} = \{a \in A : \ a \text{ não pertence a } B\}.$$

Definição. Dado $A \subset \mathbb{R}$, um ponto $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A (não é necessário que p pertença ao conjunto A) se todo intervalo I não degenerado e centrado em p, e então da forma $I = (p-\delta, p+\delta)$ com $\delta > 0$, contém algum ponto de A que seja distinto do ponto p. Isto é, para todo $\delta > 0$ temos

$$(\, I \setminus \{p\}\,) \cap A \neq \emptyset.$$

Definição. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função e p é um ponto de acumulação de A, dizemos que o limite de $f(x)$ é um número L, se x tende a p, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que temos

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ se } 0 < |x-p| < \delta \text{ e } x \in A.$$

Notação.

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

Teorema 1 (Conservação do Sinal). *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \neq 0.$$

Se $L > 0$, então existe um intervalo $I = (p-\delta, p+\delta)$, de raio $\delta > 0$, tal que temos

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2} \ \text{ se } \ x \in I \cap A \text{ mas } x \neq p.$$

Observação. Temos, é claro, um resultado análogo se $L < 0$.

Prova.

Dado
$$\epsilon = \frac{L}{2} > 0,$$
pela definição de limite existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap A$, mas $x \neq p$, então
$$|f(x) - L| < \epsilon = \frac{L}{2}.$$
Logo, é fácil ver,
$$f(x) \in \left(\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right) \clubsuit$$

Teorema 2 (Propriedades). *Seja p um ponto de acumulação de A e duas funções, $f : A \to \mathbb{R}$ e também $g : A \to \mathbb{R}$. Se*
$$\lim_{x \to p} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to p} g(x) = L_2,$$
então

(a) $\lim_{x \to p} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$.

(b) $\lim_{x \to p} cf(x) = cL_1$, *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

(c) $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = L_1 L_2$.

(d) $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *se* $L_2 \neq 0$.

Prova.

(a) Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\epsilon/2$. Existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que
$$\begin{cases} \text{se } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A, & \text{então } |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{se } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A, & \text{então } |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$
Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $0 < |x - p| < \delta$, com $x \in A$, então, pela desigualdade triangular obtemos
$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq \\ \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(b) O caso $c = 0$ é óbvio.

Se $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ consideremos

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}.$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, com $x \in A$, então temos

$$|f(x) - L_1| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$$

e portanto $|cf(x) - cL_1| < \epsilon$.

(c) Como

$$\lim_{x \to p} g(x) = L_2,$$

concluímos que existe um número $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta_1$, com $x \in A$, então temos $|g(x) - L_2| < 1$. Donde segue

$$|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|.$$

Sendo assim, obtemos

(1) se $0 < |x - p| < \delta_1$ (com $x \in A$), então $|g(x)| < 1 + |L_2|$.

Então, dado $\epsilon > 0$, e para a função g considerando o número

$$\frac{\epsilon}{2(\,|L_1| + 1\,)},$$

concluímos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

(2) se $0 < |x - p| < \delta_2$ (com $x \in A$) então $|g(x) - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2(\,|L_1| + 1\,)}$.

Quanto à função f, para o valor de ϵ acima seja

$$\frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}.$$

Então, existe $\delta_3 > 0$ tal que,

(3) se $0 < |x - p| < \delta_3$ (com $x \in A$) então $|f(x) - L_1| < \dfrac{\epsilon}{2(\,|L_2| + 1\,)}$.

Desta forma, escolhamos $\delta = \min\{\delta_1\,,\delta_2\,,\delta_3\}$, que é estritamente positivo. Assim, se temos $0 < |x-p| < \delta$ e também temos $x \in A$, então as condições (1),(2) e (3) estão satisfeitas e encontramos

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - L_1L_2| &= |[f(x) - L_1]g(x) + [g(x) - L_2]L_1| \\
&\leq |[\,f(x) - L_1\,]g(x)| + |[\,g(x) - L_2\,]L_1| \\
&\leq |f(x) - L_1|\,|g(x)| + |g(x) - L_2|\,|L_1|.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{cases}
|f(x) - L_1|\,|g(x)| \;<\; \frac{\epsilon}{2(\,|L_2|+1\,)}(\,1 + |L_2|\,) = \frac{\epsilon}{2} \\
\\
|g(x) - L_2|\,|L_1| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2(\,|L_1|+1\,)}|L_1| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{cases}$$

Donde então segue

$$|(fg)(x) - L_1L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(d) Escrevendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)},$$

pelo item (c) vemos que é suficiente mostrarmos

$$\lim_{x\to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

Notemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x-p| < \delta_1$ então

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$$

e portanto

$$|L_2| = |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|.$$

Donde então segue

$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \;\text{ ou, ainda, }\; \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Dado então $\epsilon > 0$ consideremos o número

$$\frac{\epsilon |L_2|^2}{2}.$$

Como

$$\lim_{x \to p} g(x) = L_2,$$

concluímos que existe $\delta_2 > 0$ tal que se

$$\text{se } \ 0 < |x - p| < \delta_2, \ \text{com } x \in A, \quad \text{então } \ |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon |L_2|^2}{2}.$$

Consequentemente, para $0 < |x - p| < \delta = \min\{\delta_1\,, \delta_2\}$, com $x \in A$, temos,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| &= \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)|\,|L_2|} \\ &= |g(x) - L_2| \, \frac{1}{|g(x)|} \, \frac{1}{|L_2|} \\ &< \frac{\epsilon |L_2|^2}{2} \, \frac{2}{|L_2|} \, \frac{1}{|L_2|} = \epsilon \, \clubsuit \end{aligned}$$

Corolário 3. *Para todo polinômio $p = p(x)$ e para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ temos*

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Prova.

Basta notarmos que

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0$$

e que um polinômio é uma soma de parcelas da forma $a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, e $x^i = x \ldots x$ é o produto do monômio x i-vezes e que, pelas propriedades acima temos

$$\lim_{x \to x_0} a_i x^i = a_i x_0^i$$

e então, se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ então segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x \to x_0} a_n x^n \ + \ \cdots \ + \ \lim_{x \to x_0} a_0 \\ &= a_n x_0^n \ + \ \cdots \ + \ a_1 x_0 + a_0 = p(x_0) \, \clubsuit \end{aligned}$$

Corolário 4. *Para toda função racional*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinômios,}$$

se x_0 não é raiz de $q = q(x)$ então temos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}.$$

Prova.

Segue do corolário 3 e do teorema 2(d) ♣

Teorema 5 (Do Confronto). *Sejam f, g e h três funções, todas a valores reais e definidas no conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Suponhamos que p é um ponto de acumulação de A e que exista $\delta > 0$ tal que,*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{se } x \in (p - \delta, p + \delta) \cap A \text{ mas } x \neq p.$$

Suponhamos também que

$$\lim_{x \to p} g(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L.$$

Então, segue

$$\lim_{x \to p} f(x) = L.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$ existem, respectivamente, para g e h, $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que,

$$\begin{cases} \text{se } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A, & \text{então } |g(x) - L| < \epsilon \\ \text{se } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A, & \text{então } |h(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Escolhamos então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Desta forma, se $0 < |x - p| < \delta$ e ainda $x \in A$, concluímos que $g(x)$ e também $h(x)$ pertencem ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Consequentemente, como $f(x)$ está entre $g(x)$ e $h(x)$, deduzimos que $f(x)$ também pertence ao mesmo intervalo ♣

Teorema 6 (Limite da Função Composta). *Sejam* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0\,, \\ \lim_{y \to y_0} g(y) = L\,, \\ \textit{existe } r > 0 \textit{ tal que } f(x) \neq y_0 \text{ se } x \in (x_0 - r, x_0 + r) \textit{ mas } x \neq x_0. \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = L\ .$$

Prova.

Por hipótese, $\lim_{y \to y_0} g(y) = L$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

(1) se $0 < |y - y_0| < \delta_1$ e $y \in Y$ então $|g(y) - L| < \epsilon$.

Por hipótese, $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Então, para o δ_1 acima existe $\delta_2 > 0$ tal que,

(2) se $0 < |x - x_0| < \delta_2$ e $x \in X$ então $|f(x) - y_0| < \delta_1$.

Tomando-se $\delta = \min(\delta_2\,, r)$, por (2) e pela terceira condição nas hipóteses segue que

(3) se $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$, então $0 < |f(x) - y_0| < \delta_1$.

Combinando (3) e (1), nesta ordem, temos então:

se $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in X$, então $|g(f(x)) - L| < \epsilon$.

Logo,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L = \lim_{y \to y_0} g(y)\, \clubsuit$$

Definição. *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é* contínua no ponto $x_0 \in X$, *com* x_0 *um ponto de acumulação de X, se,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Observação. Se $x_0 \in X$ não é ponto de acumulação de X, então x_0 é dito um ponto isolado de X. Toda função é declarada contínua em seus pontos isolados.

Proposição 7. *Os polinômios e as funções racionais são funções contínuas em seu domínio.*

Prova.

Segue da definição de continuidade e dos corolários 3 e 4 ♣

Teorema 8. *Sejam* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *tais que,*

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = y_0 \text{ e } g \text{ é contínua em } x_0.$$

Então,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0).$$

Prova.

Como g é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que,

$$|y - y_0| < \delta_1 \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \ .$$

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, para o δ_1 acima existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 \ .$$

Combinando as duas afirmações acima temos,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \clubsuit$$

Corolário 9. *Sejam* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to \mathbb{R}$ *tais que* f *é contínua em* x_0 *e* g *é contínua em* $y_0 = f(x_0)$*. Então,* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *é contínua em* x_0.

Prova.

Segue imediatamente do teorema 8♣

Corolário 10. *Se* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $g : X \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* $p \in X$ *então,* $f + g$, $f.g$ *e* cf $(c \in \mathbb{R})$*, são contínuas em* p*. Ainda mais, se* $g(p) \neq 0$ *então* $\frac{f}{g}$*, definida no conjunto em que* g *não se anula, também é contínua em* p.

Prova.

Consequência imediata das propriedades dos limites♣

APLICAÇÕES.

1. **Primeiro Limite Fundamental.**
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1.$$
Verificação. Em aula.

2. **Terceiro Limite Fundamental.**
$$\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$
Verificação. Em aula.

3. **Segundo Limite fundamental.**
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$
Verificação.

Mudando para a variável $h = e^x - 1$, com $h \to 0$, obtemos $e^x = h + 1$, $x = \ln(h+1)$ e,
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{h}{\ln(h+1)} = \frac{1}{\frac{1}{h}\ln(h+1)} = \frac{1}{\ln(h+1)^{\frac{1}{h}}}.$$
Para $y = \frac{1}{h}$ temos que $y \to \pm\infty$ segundo h tende a zero pela direita ou esquerda e temos
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}.$$
Mas, por 2 (terceiro limite fundamental) segue
$$\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$
Ainda, **assumindo** que a função exponencial é contínua (e portanto, sua inversa, a função logaritmo também), obtemos
$$\lim_{y \to \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1.$$
Assim, encontramos
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; \lim_{y \to \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = 1.$$

4. A função $f(x) = \sin x$, onde $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

Verificação. Pelas fórmulas de prostaférese temos

$$\sin x - \sin p = 2 \sin \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2}.$$

Notemos que $|\cos(x)| \leq 1$, para todo x. Já mostramos na prova do primeiro limite fundamental que $|\sin x| \leq |x|$, para todo x. Segue então que

$$0 \leq \ |\sin x - \sin p| = 2 \left| \sin \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-p}{2} \right| = |x - p|.$$

Logo, pelo teorema do confronto temos

$$\lim_{x \to p} |\sin x - \sin p| = 0$$

e, portanto

$$\lim_{x \to p} \sin x = \sin p.$$

5. A função $f(x) = \cos x$, onde $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

Verificação. Pelas fórmulas de prostaférese temos

$$\cos x - \cos p = -2 \sin \left(\frac{x+p}{2} \right) \sin \left(\frac{x-p}{2} \right).$$

Assim, como $|\sin x| \leq 1$, para todo x, e ainda, $|\sin x| \leq |x|$, para todo x, segue que

$$0 \ \leq \ |\cos x - \cos p| \leq 2 \left| \sin \frac{x+p}{2} \sin \frac{x-p}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-p|}{2} = |x-p|.$$

Logo, analogamente ao exemplo 4,

$$\lim_{x \to p} \cos x = \cos p.$$

6. Se $a > 0$, a função $f(x) = a^x$ é contínua.

Verificação.

Temos, $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = (g \circ h)(x)$, como $h(x) = x \ln a$ e $g(y) = e^y$. Portanto, como as funções g e h são ambas contínuas, pelo corolário 9 segue que $f = g \circ h$ é também contínua.

7. A função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde $x \in [0, +\infty)$, é contínua.

Verificação. Mostremos que

$$\lim_{x \to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}.$$

Suponhamos, inicialmente, $p > 0$.

Substituindo na identidade

$$a^n - b^n = (a - b)(\, a^{n-1} + \cdots + a^{n-1-i} b^i + \cdots + b^{n-1}\,),$$

os valores $a = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ e $b = \sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$, encontramos

$$x - p = \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p} \right) \left[\sum_{j=0}^{n-1} x^{\frac{n-1-j}{n}} p^{\frac{j}{n}} \right].$$

Se $|x - p\,| < \frac{p}{2}$ então temos $x > \frac{p}{2}$ e

$$\sum_{j=0}^{n-1} x^{\frac{n-1-j}{n}} p^{\frac{j}{n}} > n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Donde segue

$$|x - p\,| \;>\; \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p} \right| \; n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

e portanto

$$\left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p} \right| \;<\; \frac{|x - p|}{n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}}.$$

A seguir, dado $\epsilon > 0$ consideremos o número

$$\delta = \min \left\{ \frac{p}{2}\,,\, \epsilon\, n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Se $|x - p| < \delta$ então temos

$$|\, \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}\,| < \frac{|x - p|}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} < \frac{\delta}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}} \leq \epsilon.$$

Donde segue

$$\lim_{x \to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}, \quad \text{se } p > 0.$$

Se $p = 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \epsilon^n$. Se $0 \leq x < \delta$ temos

$$0 \leq \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\delta} = \epsilon \;\; \text{e, assim,} \quad \lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

8. A função

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \quad \text{onde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathrm{mdc}(p\,, q) = 1,$$

é contínua no intervalo aberto $(0, +\infty)$.

Verificação.

Temos

$$f(x) = (g \circ h)(x), \text{ com } h(x) = \sqrt[q]{x} \text{ e } g(y) = y^p,$$

que são contínuas em $(0, +\infty)$, pelo exemplo 7 e pela Proposição 7, respectivamente. Logo, como composição de funções contínuas é também uma função contínua, f é contínua.

9. As funções trigonométricas

$$\tan x, \quad \cot x, \quad \sec x \quad \text{e} \quad \mathrm{cossec} x$$

são contínuas em seus domínios.

Verificação.

Consequência imediata dos exemplos 4 e 5 e do corolário 10.