Lista 6 - Cálculo I - Licenciatura em Física (diurno) - IFUSP
MAT 1351 - Primeiro semestre de 2017
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Determine os valores máximos e mínimos (se existirem) da função dada, no intervalo especificado.

   a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$

   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$

   c) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ em $[-3, 3]$

   d) $f(x) = \sin x - \cos x$ em $[0, \pi]$

   e) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ em $[-1, 2]$.

   f) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2}$ en $(0, 2)$.

2. É possível que uma função $f = f(x)$ definida em toda a reta tenha as três propriedades

$$f(x) > 0, \quad f'(x) < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0?$$

   Justifique.

3. Mostre que o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ não tem ponto de inflexão. Dê uma condição para que o gráfico seja

$$(a) \ \text{côncavo para cima} \quad (b) \ \text{côncavo para baixo.}$$

4. Mostre que a cúbica genérica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem um único ponto de inflexão e que seu gráfico tem três formas possíveis, conforme

$$b^2 > 3ac, \quad b^2 = 3ac \quad \text{ou} \quad b^2 < 3ac.$$

   Esboce estas formas.

5. Partindo de $x^2 + y^2 = r^2$, calcule

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

   por derivação implícita e mostre por que seu sinal deve ser oposto ao sinal de y.

6. (a) Defina a função $\arcsin(x)$.

   (b) Prove um fórmula para a derivada

$$\arcsin'(x).$$

7. Expresse
$$\frac{dy}{dx}$$
em termos de x e y, onde $y = f(x)$ é uma função diferenciável dada implicitamente pela equação

a) $x^2 - y^2 = 4$

b) $y^3 + x^2y = x + 4$

c) $xy^2 + 2y = 3$

d) $y^5 + y = x$

e) $x^2 + 4y^2 = 3$

f) $xy + y^3 = x$

g) $xe^y + xy = 3$

h) $y + ln(x^2 + y^2) = 4$

i) $5y + \cos y = xy$

j) $2y + \sin y = x$

l) $x^2y^3 + xy = 2$

m) $x^2 + y^2 + 2y = 0$

8. Mostre que existe uma única função $y = f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ e dada implicitamente pela equação
$$y^3 + y = x.$$
[**Sugestão**: considere a função $y \mapsto y^3 + y$ e o teorema do valor intermediário.]
A seguir, calcule $f(0)$, $f(10$ e $f(-2)$.

9. Considere a função $y = f(x)$ determinada implicitamente pela equação
$$y^3 + y = x.$$
Suponha que f seja derivável.
   (a) Mostre que $f'(x) = \frac{1}{3[f(x)]^2+1}$.
   (b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(10, f(10))$.

10. Determine o número positivo tal que a diferença entre ele e seu quadrado seja a maior possível. Por que você pode esperar que esse número esteja no intervalo aberto $(0, 1)$?

11. Mostre que o retângulo de área máxima para uma dada perímetro é um quadrado. [**Atenção.** Este foi o primeiro problema de máximos e mínimos resolvido pelos métodos do Cálculo (por Fermat, em 1629).]

12. Mostre que o retângulo com o menor perímetro para uma dada área é um quadrado.

13. Mostre que o quadrado é o retângulo de maior área entre todos os retângulos inscritos numa dada circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

14. Qual o ponto P da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo do ponto $(3, 0)$? Seja $P = (a, b)$ tal ponto. Mostre que a reta que passa por $(3, 0)$ e (a, b) é normal à curva $y = x^2$ em (a, b).

15. Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos Ox e Oy. A função de posição de P é
$$x = \sqrt{t}$$
e a de Q é
$$y = t^2 - \frac{3}{4},\ t \geq 0.$$
Determine o instante em que a distância entre P e Q é a menor possível.

16. Determine os pontos críticos da função dada e classifique-os quanto a ponto de máximo local. ponto de mínimo local ou ponto de inflexão.

a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$

b) $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 2t + 1}$

c) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^4+2x^3+x^2+1}$

e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

f) $g(x) = x^2e^{-5x}$

17. A reta tangente à curva
$$xy - x^2 = 1$$
no ponto (x_0, y_0), com $x_0 > 0$, intercepta o eixo Oy no ponto $B = (0, b)$. Mostre que a área do triângulo de vértices $(0, 0)$, (x_0, y_0) e $B = (0, b)$ não depende de (x_0, y_0).

18. A função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação
$$3y^2 + 2xy - x^2 = 3.$$
Sabe-se que para todo ponto $x \in Dom(f)$ temos $f(x) > 0$ e que f admite uma reta tangente T paralela à reta
$$5y - x = 2.$$
Determine T.

19. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$

e) $f(x) = \mathrm{cos}x$ e $x_0 = 0$

f) $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$

20. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\ln 1,3$

b) $e^{0,03}$

c) $\sqrt[3]{8,2}$

d) $= \sqrt{4,1}$

e) $\cos 0,2$

f) $\sin 0,1$