

**Lista 4 - Cálculo I - Licenciatura em Física (diurno) - IFUSP**  
**MAT1351 - Primeiro semestre de 2017**  
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Dados

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- a) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  e portanto,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  não existe.  
b) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$  e portanto,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  não existe.  
c) Determine fórmulas para  $f(x) \cdot g(x)$ .  
d) Prove que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$  existe, mostrando que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x)$ .

2. Dê o valor  $f(p)$ , se existir, para que  $f = f(x)$  seja contínua em  $p$ . Justifique.

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ,  $p = 2$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ ,  $p = 0$

c)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ,  $p = 0$

d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ 4, & \text{se } x = 3; \end{cases} \quad p = 3$

3. Calcule e justifique.

a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x - 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$

4. Determine  $L$  para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{em } p = 2$

b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad \text{em } p = 3$

5. Calcule.

a)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^4 + x}$

c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$

6. Dada  $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$ , calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$

7. Calcule.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

8. Calcule  $f'(x)$ .

a)  $f(x) = 3x^2 + 5$

b)  $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

c)  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

d)  $f(x) = 3x + \sqrt{x}$

e)  $f(x) = 5 + 3x^{-2}$

f)  $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

g)  $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$

h)  $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}$

i)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

j)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$

k)  $f(x) = 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

l)  $f(x) = 6x^3 + \sqrt[3]{x}$

9. Calcule (as derivadas de quatro funções trigonométricas).

a)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} p}{x - p}$

b)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} p}{x - p}$

c)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} p}{x - p}$

d)  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\operatorname{sec} x - \operatorname{sec} p}{x - p}$

10. Dada  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ , verifique que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . A função  $f$  é contínua em 1? Por quê?

11. Esboce (sem analisar derivadas) o gráfico e discuta a continuidade da função.

a)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 9}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$

c)  $f(x) = \sqrt{(x-3)(4-x)}$

d)  $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$

e)  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, x \neq 0$

f)  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 6x - 7}}$

12. Esboce o gráfico das funções abaixo e mostre o solicitado.

a)  $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ -x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$  não é derivável em  $p = 1$

b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1 \\ 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  é derivável em  $p = 1$

13. Calcule  $g'(x)$  em cada um dos casos abaixo.

a)  $g(x) = \sqrt[4]{x}$

b)  $g(x) = \sqrt[6]{x}$

c)  $g(x) = \sqrt[8]{x}$

d)  $g(x) = \sqrt[9]{x}$ .

14. Calcule  $f'(x)$  onde  $f(x)$  é igual a

a)  $\frac{x}{x^2 + 1}$

b)  $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$

c)  $\frac{3x^2 + 3}{5x - 3}$

d)  $\frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

e)  $5x + \frac{x}{x - 1}$

f)  $\sqrt{x} + \frac{3}{x^3 + 2}$

15. Calcule os limites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{3 + x^2}{x}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2 - \frac{1}{x} \right]$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{4x^4 + 3x + 2}$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 3}$$

$$\text{q) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x + 2)$$

$$\text{s) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$$

$$\text{u) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$$

$$\text{w) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - \sqrt{x^2 + 3}]$$

$$\text{y) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt[3]{2 + 3x^3})$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x - 4}$$

$$\text{d) } \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 2}{t^2 - 4}$$

$$\text{f) } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^3 - 4}{5y + 3}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 3}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 3x + 1}$$

$$\text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x}}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$$

$$\text{t) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^2 + x + 3}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x + 3}}{2x - 1}$$

$$\text{x) } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - 1}]$$

$$\text{z) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9}$$

16. Calcule  $f'(x)$ , com  $f(x)$  igual a:

a)  $x^2e^x$                       b)  $3x + 5 \ln x$

c)  $e^x \cos x$                       d)  $\frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

e)  $x^2 \ln x + 2e^x$                       f)  $\frac{x + 1}{x \ln x}$

g)  $4 + 5x^2 \ln x$                       h)  $\frac{e^x}{x^2 + 1}$

i)  $\frac{\ln x}{x}$                       j)  $\frac{e^x}{x + 1}$

17. Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$                       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$                       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$                       f)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^x$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$                       h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

18. Ache a reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  e paralela à reta  $y = 4x + 2$ .

19. Ache a equação da reta tangente ao gráfico (esboce o gráfico e a reta) de

(a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  no ponto  $p = 2$ .

(b)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  no ponto  $p = 1$ .

(c)  $f(x) = e^x$ , no ponto  $p = 0$ .

(d)  $f(x) = \ln x$  no ponto  $p = 1$ .

20. Dê a equação da reta tangente ao gráfico de  $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$  no ponto  $(1, g(1))$ .