

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Cálculo I - MAT 1351 - Licenciatura em Física (IFUSP)  
Primeiro semestre de 2017 - diurno  
**TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS,  
DE ROLLE, DO VALOR MÉDIO (TVM),  
DARBOUX, TVM GENERALIZADO (CAUCHY) E  
REGRAS DE L'HOSPITAL**

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira  
<http://www.ime.usp.br/~oliveira>      oliveira@ime.usp.br

1. Introdução.....	1
2. Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio (TVM).....	2
3. Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux).....	5
4. Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy).....	6
5. Regras de L'Hospital.....	8
Referências.....	13.

## 1. Introdução

Neste texto provamos o Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy) e as duas regras de L'Hospital usualmente encontradas no Cálculo 1. Além desses resultados, apresentamos o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Médio para Derivadas (TVM) e o Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux).

Apresentamos, sem demonstração, os teoremas abaixo.

**Teorema do Valor Intermediário (TVI, Bolzano).** Seja  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, a imagem de  $f$ , denota por e definida por

$$\text{Im}(f) = f((a, b)) = \{f(x) : x \in (a, b)\},$$

é um intervalo. Isto é, dado um número  $y$  satisfazendo  $f(x_1) < y < f(x_2)$ , com  $x_1$  e  $x_2$  ambos em  $(a, b)$ , então existe  $x$  em  $(a, b)$  tal que

$$f(x) = y.$$

**Prova.** <http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT103-FEA-Supremo-2015.pdf>.

**Teorema de Bolzano-Weierstrass.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então,  $f$  assume um valor máximo,  $M$ , e um valor mínimo,  $m$ , no intervalo  $[a, b]$ . Isto é, existem  $x_1$  e  $x_2$ , ambos em  $[a, b]$ , tais que

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

**Prova.** <http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT103-FEA-Supremo-2015.pdf>.

A seguir, utilizamos os resultados acima.

## 2. Teorema de Rolle e Teorema do Valor Médio (TVM).

**Condição Necessária para Máximos e Mínimos.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e derivável em  $(a, b)$ . Seja  $p$  um ponto de máximo local ou de mínimo local de  $f$ . Então,

$$f'(p) = 0.$$

**Prova.** Notemos que  $p \in (a, b)$ .

Temos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = f'(p).$$

Se  $p$  é ponto de máximo local, o primeiro limite é maior ou igual a zero e o segundo é menor ou igual a zero. Como eles coincidem, temos  $f'(p) = 0$ .

Se  $p$  é ponto de mínimo local, analisando  $-f$  recaímos no caso acima ♣

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Teorema de Rolle.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, derivável em  $(a, b)$  e tal que  $f(a) = f(b)$ . Então, existe  $c$  em  $(a, b)$  tal que*

$$f'(c) = 0.$$

**Prova.**

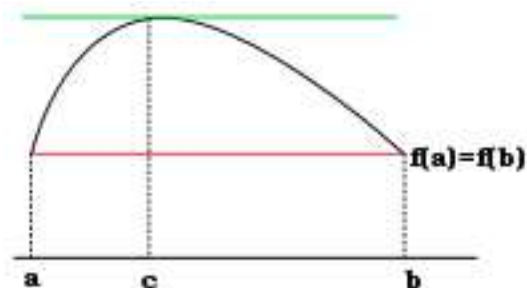


Figura 1: Teorema de Rolle

Se  $f$  é constante, o resultado é óbvio.

Caso contrário, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass  $f$  assume um mínimo  $m = f(x_1)$  e um máximo  $M = f(x_2)$ , com  $x_1, x_2 \in [a, b]$  e  $m \neq M$ . Logo, como  $f(a) = f(b)$ , concluímos que ou  $x_1 \in (a, b)$  ou  $x_2 \in (a, b)$ .

Isto é, ou  $x_1$  é um ponto de mínimo local e  $f'(x_1) = 0$  ou  $x_2$  é um ponto de máximo local e  $f'(x_2) = 0$  ♣

**Teorema do Valor Médio (TVM).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e derivável em  $(a, b)$ . Então, existe um ponto  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Prova.**

A reta secante ao gráfico de  $f$  pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  é dada por

$$S(t) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a), \text{ onde } t \in \mathbb{R}.$$

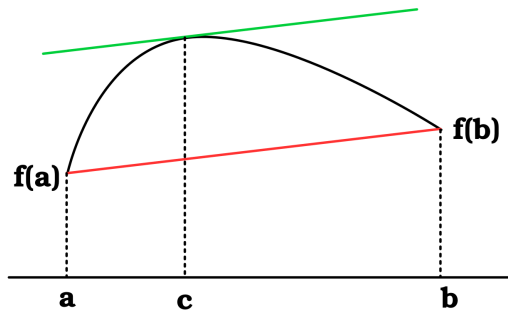


Figura 2: Teorema do Valor Médio (TVM)

A seguir, definimos a função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ ,

$$\varphi(t) = f(t) - S(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

É claro que  $\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0$  e  $\varphi(b) = f(b) - f(b) = 0$  e então, pelo Teorema de Rolle aplicado à função  $\varphi$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - S'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \clubsuit$$

**Interpretação física do Teorema do Valor Médio.** Suponhamos que uma partícula move-se sobre uma reta e que  $s(t)$ , onde

$$s : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R},$$

indica a distância em metros desta partícula em relação à origem adotada na reta, no instante  $t$  medido em segundos. Então, o Teorema do Valor Médio expressa que em algum instante  $t_0 \in [t_1, t_2]$  a velocidade instantânea  $v(t_0) = s'(t_0)$  é igual à velocidade média  $v_{\text{média}}$  no período  $[t_1, t_2]$ . Isto é, temos

$$s'(t_0) = v(t_0) = v_{\text{média}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

É também importante a propriedade abaixo.

### 3. Teorema do Valor Intermediário para Derivadas (Darboux).

**Teorema (Propriedade do Valor Intermediário para Derivadas, Darboux).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $[a, b]$ . Então, a imagem da função  $f'$  é um intervalo.*

**Prova.**

Sejam  $f(c)$  e  $f(d)$  dois pontos distintos na imagem de  $f'$ . Trocando  $f$  por  $-f$  se preciso, podemos supor sem perda de generalidade  $c < d$  e  $f'(c) < f'(d)$ . Consideremos um número  $\lambda$  tal que

$$f'(c) < \lambda < f'(d).$$

Mostremos que existe  $p$  em  $(c, d)$  tal que  $f'(p) = \lambda$ . Analisemos dois casos.

◇ O caso  $\lambda = 0$ . Então temos  $f'(c) < 0$  e  $f'(d) > 0$ .

Para  $x$  em um pequeno intervalo  $(c, c + \epsilon)$  [com  $\epsilon > 0$ ] temos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

e portanto  $f(x) < f(c)$ .

Para  $x$  em um pequeno intervalo  $(d - \delta, d)$  [com  $\delta > 0$ ] temos

$$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} > 0$$

e portanto  $f(x) < f(d)$ . Desta forma, o ponto de mínimo  $x = p$  da função  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  (com existência garantida pelo Teorema de Weierstrass) pertence ao intervalo aberto  $(c, d)$ . Temos assim,  $f'(p) = 0 = \lambda$ .

◇ O caso geral. Basta vermos que  $g(x) = f(x) - \lambda x$  satisfaz

$$g'(c) < 0 < g'(d) \clubsuit$$

#### 4. TVM Generalizado (Cauchy).

**Teorema do Valor Médio Generalizado (Cauchy).** *Sejam  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas, deriváveis em  $(a, b)$  e com  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Então, existe um ponto  $p \in (a, b)$  tal que*

$$[g(b) - g(a)]f'(p) = [f(b) - f(a)]g'(p).$$

*Em particular, se  $f'(p) \neq 0$  então temos*

$$\frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(p)}{f'(p)}.$$

**Prova.**

Consideremos a função

$$\varphi(t) = [g(b) - g(a)]f(t) - [f(b) - f(a)]g(t), \text{ onde } t \in [a, b].$$

Notemos que  $\varphi$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ .

Temos, é claro,

$$\begin{cases} \varphi(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a) \\ \text{e} \\ \varphi(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b). \end{cases}$$

Logo,  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .

Assim, pelo TVM existe  $p$  em  $(a, b)$  tal que

$$0 = \varphi'(p) = [g(b) - g(a)]f'(p) - [f(b) - f(a)]g'(p) \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio Generalizado.**

Esboçando no plano uma curva  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ , onde  $t \in [a, b]$ , e a reta  $S$  pelos pontos  $(f(a), g(a))$  e  $(f(b), g(b))$  vemos que existe uma reta  $T$  tangente à curva  $\gamma$ , em algum ponto  $\gamma(c)$ , e também paralela à reta  $S$ . Isto é, se  $m_T$  e  $m_S$  são os coeficientes angulares de  $T$  e  $S$  temos,

$$m_T = m_S = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

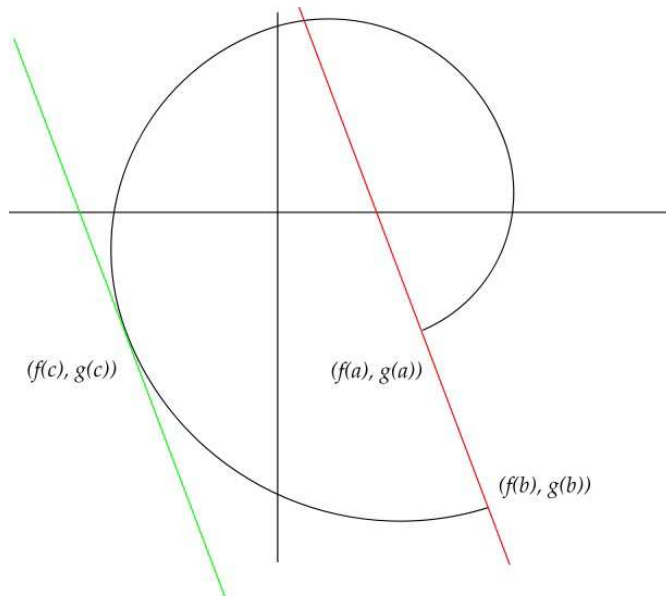


Figura 3: TVM Generalizado

Note que geometricamente o vetor tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $c$  é o vetor

$$\begin{aligned} \gamma'(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \frac{\gamma(t) - \gamma(c)}{t - c} = \lim_{t \rightarrow c} \left( \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) \\ &= \left( \lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \lim_{t \rightarrow c} \frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = (f'(c), g'(c)), \end{aligned}$$

interpretado fisicamente como o vetor velocidade da curva  $\gamma$  no “instante  $c$ ”.

Ainda mais, o coeficiente angular  $m_T$  da reta  $T$ , paralela ao vetor  $\gamma'(c)$ , é a tangente do ângulo  $\theta$  que o vetor forma com o eixo  $Ox$ . Logo,

$$m_T = \tan \theta = \frac{g'(c)}{f'(c)} \clubsuit$$

## 5. Regras de L'Hospital.

Tais regras aplicam-se à análise das indeterminações

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty}.$$

Mostremos com exemplos que são também indeterminações

$$(i) 0 \cdot \infty \quad (ii) \infty - \infty \quad (iii) 0^0 \quad (iv) \infty^0 \quad \text{e} \quad (v) 1^\infty.$$

**Verificação.** Temos,

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{13}{x} = 13.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + 15) - x] = 15.$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^{\frac{\ln 7}{x}} = e^{\ln 7} = 7.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln \pi}{x}\right)^x = e^{\ln \pi} = \pi \clubsuit$$

Estas cinco indeterminações são redutíveis às indeterminações  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ .

É trivial ver que  $0 \cdot \infty$  é reduzido a

$$\frac{\infty}{\infty}.$$

Quanto aos casos (iii), (iv) e (v), temos

$$0^0 = e^{0 \ln 0} = e^{0 \cdot (-\infty)} \quad ; \quad \infty^0 = e^{0 \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty} \quad ; \quad 1^\infty = e^{\infty \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}.$$

Peço ao leitor analisar o caso (ii).

**Atenção.**  $0^\infty$  não é indeterminação pois

$$0^\infty = e^{\infty \ln 0} = e^{\infty \cdot (-\infty)} = e^\infty \in \{0, +\infty\}.$$



Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Motivação às Regras de L'Hospital.** Mostremos inicialmente uma versão simples e bem útil de tais regras. Suponhamos  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  deriváveis (logo, contínuas) e  $p \in (a, b)$  satisfazendo

$$f(p) = g(p) = 0 \text{ e } g'(p) \neq 0.$$

Então, temos

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)}.$$

**Verificação.**

É trivial ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}{\frac{g(x) - g(p)}{x - p}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}}{\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p}} \\ &= \frac{f'(p)}{g'(p)} \clubsuit \end{aligned}$$

**Exemplos.** Aplicando a regra acima encontramos

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} \\ &= \frac{1 - 0}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sec^2 x} \\ &= \frac{1}{1} = 1 \clubsuit \end{aligned}$$

**Teorema (Primeira Regra de L'Hospital - caso trivial).** Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis no intervalo aberto  $(p, b)$ , com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$ . Suponha

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow p^+} g(x), \text{ com}$$

os limites  $\lim_{x \rightarrow p^+} f'(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow p^+} g'(x)$  existindo em  $[-\infty, +\infty]$ ,  
mas não ambos nulos nem ambos infinitos.

Então segue

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ em } [-\infty, +\infty].$$

**Prova (Graças à turma Licenciatura em Física - IFUSP - 2017- diurno).**

Definindo

$$f(p) = g(p) = 0$$

obtemos  $f$  e  $g$  contínuas em  $[p, b)$  e deriváveis no intervalo aberto  $(p, b)$ . Assim, dado  $x \in (p, b)$  e aplicando o TVM ao intervalo fechado  $[p, x]$ , vemos que existem  $x_1 \in (p, x)$  e  $x_2 \in (p, x)$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{\frac{f(x)-f(p)}{x-p}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}.$$

Se  $x \rightarrow p^+$ , então  $x_1 \rightarrow p^+$  e  $x_2 \rightarrow p^+$ . Logo (com aritmética em  $[-\infty, +\infty]$ ),

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow p^+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow p^+} g'(x)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \clubsuit$$

**Comentário.** Valem regras similares à dada acima nas seguintes quatro condições,

$$x \rightarrow p^- \quad x \rightarrow p \quad x \rightarrow +\infty \quad e \quad x \rightarrow -\infty.$$

De fato, a primeira regra de L'Hospital sob a condição " $x \rightarrow p^-$ " é trivialmente equivalente à primeira regra de L'Hospital sob a condição " $x \rightarrow p^+$ " pois

$$x \rightarrow p^+ \iff -x \rightarrow -p^-$$

e, definindo  $F(x) = f(-x)$  e  $G(x) = g(-x)$  obtemos  $F'/G' = f'/g'$ .

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**Teorema (Primeira Regra de L'Hospital).** Sejam  $f$  e  $g$  funções deriváveis no intervalo aberto  $(p, b)$ , com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$ . Suponha

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow p^+} g(x) \quad \text{e}$$
$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad \text{com } L \text{ em } [-\infty, +\infty].$$

Então segue

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

**Prova.**

Definindo

$$f(p) = g(p) = 0$$

obtemos  $f$  e  $g$  contínuas em  $[p, b)$  e deriváveis no intervalo aberto  $(p, b)$ . Assim, dado  $x \in (p, b)$  e aplicando o *TVM generalizado* ao intervalo fechado  $[p, x]$ , vemos que existe  $x_1 \in (p, x)$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Se  $x \rightarrow p^+$ , então  $x_1 \rightarrow p^+$ . Concluimos então que

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_1 \rightarrow p^+} \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \clubsuit$$

Os comentários à *Regra de L'Hospital - caso trivial* - se aplicam ao *Teorema Regra de L'Hospital*.

A seguir, a *Segunda Regra de L'Hospital*. Enunciamos tal regra sob a condição

$$x \rightarrow p^-.$$

Analogamente à primeira regra de L'Hospital, valem regras similares à enunciada na segunda regra de L'Hospital nas seguintes quatro condições

$$x \rightarrow p^+ \quad x \rightarrow p \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad x \rightarrow -\infty.$$

**Teorema (Segunda Regra de L'Hospital).** Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis no intervalo  $[a, p)$ , com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, p)$ . Suponhamos

$$\lim_{x \rightarrow p^-} |g(x)| = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \text{ (com } L \in \mathbb{R} \text{ ou } L = -\infty \text{ ou } L = +\infty).$$

Então, temos

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[**Atenção.** A tradicional hipótese  $|f(x)| \rightarrow +\infty$  se  $x \rightarrow p^-$ , é supérflua.]

**Prova.**

Simplificações.

- ◇ Se  $L$  é real, podemos supor  $L = 1$ . Se  $L \neq 0$  basta trocarmos  $g$  por  $Lg$ . Se  $L = 0$ , basta trocarmos a função  $f$  por  $F = f + g$  e observarmos que

$$\frac{F'}{g'} = \frac{f'}{g'} + 1 \text{ e } \frac{F}{g} = \frac{f}{g} + 1.$$

- ◇ Como  $g'$  não se anula, temos que  $g$  é injetora e contínua. Logo,  $g$  é estritamente crescente ou estritamente decrescente. Podemos então supor

$$g \text{ estritamente crescente, } g' > 0, \lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = +\infty \text{ e } g > 0.$$

- ◇ Seja  $L = 1$  ou  $L = +\infty$ . Encolhendo  $[a, p)$  se preciso, podemos supor

$$\frac{f'}{g'} > \frac{1}{2} \text{ no intervalo } [a, p) \text{ e } f' > 0.$$

Pelo TVM generalizado, para todo  $x \in (a, p)$  existe  $c \in (a, x)$  tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2} \text{ e } f(x) - f(a) > \frac{g(x) - g(a)}{2}.$$

As informações já obtidas revelam que temos

$$f \text{ estritamente crescente e } \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty \text{ (podemos supor } f > 0).$$

Com tais simplificações, temos apenas os casos  $L = 1$  e  $L = +\infty$  para analisar.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

◇ **Caso**  $L = 1$ . Seja  $\epsilon$ , com  $0 < \epsilon < 1$ . Encolhendo  $[a, p)$ , podemos supor

$$(1) \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon), \text{ para todo } c \in (a, p).$$

Seja  $x \in (a, p)$ . O TVM generalizado e as hipóteses sobre  $f$  e  $g$  garantem

$$(2) \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ para algum } c \in (a, p).$$

Observemos que

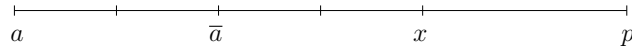
$$(3) \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left( \frac{1 - \frac{f(a)}{f(x)}}{1 - \frac{g(a)}{g(x)}} \right).$$

Temos

$$\lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty.$$

Para algum  $\bar{a} \in (a, p)$  temos,

$$(4) \quad \text{se } x \in (\bar{a}, p) \text{ então } \frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon).$$



Utilizando (3), (2), (1) e (4), para todo ponto  $x \in (\bar{a}, p)$  temos (é trivial)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left( \frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \right) \in ((1 - \epsilon)^2, (1 + \epsilon)^2) \subset (1 - 3\epsilon, 1 + 3\epsilon).$$

◇ **Caso**  $L = +\infty$ . Seja  $M > 0$ . Encolhendo  $[a, p)$ , se preciso, podemos supor

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} > 2M \text{ para todo } c \in [a, p).$$

Para  $\epsilon = 1/2$ , seja  $\bar{a}$  como em (4). Utilizando (3), (2) e (4) encontramos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left( \frac{1 - \frac{g(a)}{g(x)}}{1 - \frac{f(a)}{f(x)}} \right) > 2M(1 - \epsilon) = M, \text{ para todo } x \in (\bar{a}, p) \clubsuit$$

## Referências

1. Bressoud, D., *A Radical Approach to Real Analysis*, 2nd ed., MAA, 2007
2. Browder, A., *Mathematical Analysis, An Introduction*, Springer, 1996.
3. Hainer, E. & Wanner, G., *Analysis by Its History*, Springer, 1996.
4. Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.
5. Spivak, M., *Calculus*, 4th ed., Publish or Perish, 2008.

*Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo  
Rua do Matão 1010 - CEP 05508-090  
São Paulo, SP - Brasil  
e-mail: oliveira@ime.usp.br*