Cálculo I - MAT 1351 - Licenciatura em Física (IFUSP)

REGRA DA CADEIA E TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Primeiro semestre de 2017 - diurno

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Teorema (Regra da Cadeia). *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis. Então, $f \circ g$ é diferenciável e*

$$(f \circ g)'(p) = f'\big(g(p)\big)g'(p), \text{ para todo } p \in \mathbb{R}.$$

Prova.

◇ Fixemos p na reta. Dado um incremento não nulo h, exprimimos o *quociente de Newton* para a composta $f \circ g$ no ponto p via duas sentenças

$$\frac{f(g(p+h)) - f(g(p))}{h} = \begin{cases} \frac{f(g(p+h))-f(g(p))}{g(p+h)-g(p)} \frac{g(p+h)-g(p)}{h}, \text{ se } g(p+h) - g(p) \neq 0, \\ \\ 0, \text{ se } g(p+h) - g(p) = 0. \end{cases}$$

◇ Analisemos dois casos. Destaquemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{h} = g'(p).$$

◇ Caso $g'(p) \neq 0$. Então, para $|h|$ pequeno o suficiente temos $g(p+h)-g(p) \neq 0$. Assim, para computar $(f \circ g)'(p)$ utilizamos apenas a primeira sentença. Com a troca $y = g(p+h)$ e já que g é contínua (pois derivável), obtemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(p+h)) - f(g(p))}{g(p+h) - g(p)} = \lim_{y \to g(p)} \frac{f(y) - f(g(p)}{y - g(p)} = f'(g(p)).$$

Donde segue $(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p)$. Caso provado.

◇ Caso $g'(p) = 0$. O limite da primeira sentença para $h \to 0$ é

$$f'(g(p))g'(p) = f'(g(p)).0 = 0.$$

O limite da segunda sentença para $h \to 0$ é

$$g(p) - g(p) = 0.$$

Logo, a derivada de $f \circ g$ em p existe e é 0. Portanto valem

$$\begin{cases} (f \circ g)'(p) = 0 \\ f'(g(p))g'(p) = 0 \end{cases} \quad \text{e portanto } (f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p) \clubsuit$$

Teorema da Função Inversa. Seja I um intervalo aberto e $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ contínua e inversível. Então,

(a) f é estritamente crescente ou f é estritamente decrescente.

(b) $J = f(I)$ é um intervalo aberto.

(c) $g = f^{-1} : J \to I$ é contínua.

(d) Se f é derivável em x, com $f'(x) \neq 0$, então g é derivável em $y = f(x)$ e

$$g'(y) = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}.$$

Prova.

(a) Suponha $x_1 < x_2 < x_3$, com $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) > f(x_3)$. Seja y tal que

$$\max\big(f(x_1), f(x_3)\big) < y < f(x_2).$$

Logo, pelo teorema do valor intermediário obtemos

$$y \in f\big((x_1, x_2)\big) \text{ e } y \in f\big((x_2, x_3)\big) \lightning$$

Também a função $-f$ é contínua e inversível e também não pode ocorrer $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_2) < f(x_3)$. Concluímos então que f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

(b) Pelo teorema do valor intermediário, $J = f(I)$ é um intervalo. Por (a), f é estritamente crescente/decrescente. Logo, J não pode conter extremidades.

(c) Trocando f por $-f$, se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que f é estritamente crescente. Consideremos então $y \in J$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $[g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon] \subset I$. Existem então y_1 e y_2 tais que $g(y_1) = g(y) - \epsilon$ e $g(y_2) = g(y) + \epsilon$. Logo,

$$g\big([y_1, y_2]\big) = [g(y) - \epsilon, g(y) + \epsilon].$$

(d) Dado um ponto $y_0 = f(x_0)$, temos que $g(y) \to g(y_0) = x_0$ se $y \to y_0$. Então,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(g(y)) - f(g(y_0))}{g(y) - g(y_0)}} \overset{x = g(y)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(g(y_0))} \clubsuit$$

O teorema da função inversa tem como hipótese

$$\text{“}f : I \to f(I) \text{ contínua e inversível”.}$$

Precisamos então identificar funções inversíveis de um modo um tanto simples. A proposição abaixo é então bastante útil.

Proposição. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injetora. Então, $J = f(I)$ é um intervalo e*

$$f : I \to J \text{ é contínua e inversível.}$$

Prova.

Pelo teorema do valor intermediário (TVI) temos que $J = f(I)$ é um intervalo. Então,

$$f : I \to J = f(I)$$

é injetora e sobrejetora e contínua. Isto é, $f : I \to J$ é contínua e inversível ♣