CÁLCULO II - MAT 133 - IQUSP - Noturno

RESUMO: REGRAS DA CADEIA E DE L'HOSPITAL E GRÁFICOS

2º semestre de 2013

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1 - **Regra da Cadeia** (idéia da demonstração)

Supondo $z = f(y)$ e $y = g(x)$ funções diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determinemos a derivada da função composta $z = (f \circ g)(x)$. Interpretando derivadas como limite de taxas de variação temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \ ,$$

sendo que se Δx tende a zero então $\Delta y = g(x+\Delta x) - g(x)$ também tende a zero (pois g é contínua, já que derivável) e assim,

$$\begin{cases} \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx (f \circ g)' \\ \frac{\Delta z}{\Delta y} \approx f' \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx g' \ . \end{cases}$$

Isto é, a taxa de variação da composta é o produto das taxas de variação e, analogamente, a derivada da composta é o produto das derivadas.

Identifiquemos os pontos analisados. Sendo $x = p$ e $y = g(p)$ temos,

$$(f \circ g)'(p) \approx \frac{\Delta z}{\Delta x}(p) = \frac{(f \circ g)(p+\Delta x) - (f \circ g)(p)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(g(p+\Delta x)) - f(g(p))}{g(p+\Delta x) - g(p)} \ \frac{g(p+\Delta x) - g(p)}{\Delta x} \ ,$$

$$\frac{g(p+\Delta x) - g(p)}{\Delta x} \approx g'(p) \text{ e}$$
$$\frac{f(g(p+\Delta x)) - f(g(p))}{g(p+\Delta x) - g(p)} \approx f'(g(p)) \ ;$$

sendo que esta última aproximação segue de $\frac{f(y)-f(g(p))}{y-g(p)} \approx f'(g(p))$ se $y \approx g(p)$, o que realmente ocorre pois, já vimos, $y = g(p+\Delta x)$ tende a $g(p)$ quando $\Delta x \to 0$. Passando ao limite (para $\Delta x \to 0$) as aproximações acima, encontramos

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p) \ .$$

Atenção O cômputo é válido desde que $\Delta y = g(p + \Delta x) - g(p) \neq 0$, o que é verdade (para valores pequenos, não nulos, de $|\Delta x|$) se admitirmos $g'(p) \neq 0$. Temos então a regra da cadeia provada nos pontos em que g' é não nula. A demonstração completa é um pouco mais elaborada (vide texto cadeia-inversa).

2 - **Elementos para esboço de gráficos e determinação de máximos e mínimos**

I - Se $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e $J = (c, d) \subset (a, b)$, então temos,
(i) se $f' > 0$ sobre J então f é estritamente crescente sobre J,
(ii) se $f' < 0$ sobre J então f é estritamente decrescente sobre J,
(iii) se $f'' > 0$ sobre J então f tem concavidade voltada para cima sobre J,
(iv) se $f'' < 0$ sobre J então f tem concavidade voltada para baixo sobre J.

Prova de (i) e (ii).
se $f' > 0$ sobre J então, se $x, y \in J$, $x < y$, pelo TVM temos que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$, para algum c entre x e y, e portanto, $f(y) > f(x)$. Analogamente se $f' < 0$ sobre J.
Interpretação de (iii) e (iv) :
Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre J, as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de f, restrita a J, são tais que suas inclinações (coef. angulares) aumentam com o decorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se $f'' < 0$.

II - (i) Se um ponto é de máximo ou mínimo então a derivada no ponto é nula.
(ii) Um ponto de inflexão é definido como um ponto onde muda a concavidade. Assim, em um ponto de inflexão a derivada segunda é nula.
Prova de (i): supondo $f'(p) > 0$, f' contínua, temos $f' > 0$ em um pequeno sub-intervalo J contendo p e, f crescente em J. Absurdo! pois p é de máximo ou mínimo. Analogamente, $f'(p) < 0$ é também falso. Concluímos que $f'(p) = 0$.
Prova de (ii): supondo f'' contínua, a concavidade 'antes' do ponto p voltada

para baixo e 'após' voltada para baixo, temos $f'' \leq 0$ antes de p e $f'' \geq 0$ depois de p ; segue que $f''(p) = 0$.

III - Seja $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Seja p um ponto de máximo ou de mínimo de f. Então, ou p é um dos extremos do intervalo I ou $f'(p) = 0$.

IV - Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a reta $r : y = mx + n$ é dita uma assíntota para f, em $+\infty$, se $lim[f(x) - (mx + n)] = 0$, quando $x \to +\infty$. Analogamente para assíntotas em $-\infty$ e mesmo em um ponto $p \in \mathbb{R}$, f não derivável em p ; podendo p pertencer ou não ao domínio de f.

3 - **Regras de L'Hospital** Uma indeterminação ocorre quando no cômputo do limite de um quociente encontramos uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. O caso trivial abaixo é ilustrativo.

Sejam f e g deriváveis em p, tais que $f(p) = g(p) = 0$ e $g'(p) \neq 0$. Então,

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \ .$$

Prova. Temos

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} = \lim_{x \to p} \frac{\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{(x-p)}}{\lim\limits_{x \to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \blacksquare$$