MAT 133 - CÁLCULO II - IQUSP
2º SEMESTRE de 2013
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

INTEGRAL

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0, T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < ... < t_i < ... < t_n = T$, a variação no período $[0, T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]} \ .$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ é a vazão num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$(2) \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1} - t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}) \ .$$

Combinando (1) e (2) obtemos,

$$(3) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i}) \Delta t_i \ .$$

Definimos então a integral de Q' $[\int_0^T Q'(t)dt]$ como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i) \Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] \ ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se Q' é continua, temos o **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo**,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \blacksquare$$

Interpretação: a variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado. Retornem a ela ao estudarem no Cálculo III o Teorema da Divergência, ou de Gauss.

Passemos à demonstração formal do 1º Teorema Fundamental do Cálculo.

1. Seja $f; [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável e tal que $F' = f$. Então,
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\ .$$
Prova: Por definição,
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,,$$
onde $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b\}$ é uma **partição** de $[a, b]$, $|\mathcal{P}| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$ é a **norma** da partição $\mathcal{P}$, $\mathcal{E} = \{c_1, ...c_n\}$ é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ e
$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,,$$
é a **soma de Riemann** relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos,
$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + ...[F(x_n) - F(x_{n-1})]$$
e, pelo TVM para Derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$. Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemmann de f relativa à esta partição $\mathcal{P}$ e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ é
$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$
Assim, para toda partição $\mathcal{P}$ existe uma escolha $\mathcal{E}$ tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$. Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido: $F(b) - F(a)$ ■

2. **1º TVM para Integrais.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\ .$$

Prova. Se f é constante é óbvio que em qualquer c em (a, b) a igualdade (*) é satisfeita.

Se f não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então, $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a, b]$, e existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $m < f(x_0) < M$, e como f contínua, obtemos $\int_a^b [f(x) - m]\,dx > 0$ e $\int_a^b [M - f(x)]\,dx > 0$. Logo,

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx\,, \quad \text{donde} \quad m < \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} < M\,,$$

e portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou (x_2, x_1)) tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \blacksquare$$

3. **2º TVM para Integrais.** Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f e g contínuas, com $g \ge 0$ e $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(**) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Prova. Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de f, respectivamente. Então, $\forall x \in [a, b]$ temos $m \le f(x) \le M$ e ainda, $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

Caso 1. Se $m < \gamma < M$, pelo TVI existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou (x_2, x_1)) tal que $f(c) = \gamma$.

Caso 2. Se $\gamma = M$ então $\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0$ e portanto, como $[M - f(x)]g(x) \ge 0$, temos $[M - f(x)]g(x) = 0\,, \forall x \in [a, b]$, e como g não se anula em algum intervalo aberto J, segue que f é então constante e igual a M em J e assim, todo c em J satisfaz (**).

Caso 3. $(\gamma = m)$ Análogo ao caso 2 $\blacksquare$