

MAT 133 - Cálculo II - IQUSP
 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM COEFICIENTES CONSTANTES
 2º SEMESTRE de 2013
 Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

RESOLUÇÃO DE $P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t}$, R um polinômio real e $\gamma \in \mathbb{C}$

Lema. *Sejam a_n, \dots, a_1, a_0 números não todos nulos e $R(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$ um polinômio de grau menor ou igual a n . Consideremos a edo na variável t*

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = R(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0.$$

(a) *Se $a_0 \neq 0$, então existe uma solução polinomial Q , com $\text{grau}(Q) = \text{grau}(R)$.*

(b) *Seja $k = \max\{i : a_0 = 0, \dots, a_i = 0\}$. Então, a edo tem uma solução polinomial da forma $Q = t^{k+1} R_1$, com $\text{grau}(R_1) = \text{grau}(R)$.*

Prova.

(a) Resolvamos o par de equações

$$(*) \begin{cases} Q(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \\ a_0 Q + a_1 Q' + a_2 Q'' + \dots + a_j Q^{(j)} + \dots + a_{n-1} Q^{(n-1)} + a_n Q^{(n)} = R, \end{cases}$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, nas demais ele é zero. Fixada tal parcela um fator deste coeficiente surge do trivial cômputo,

$$c_{n-i+j} \frac{d^j}{dt^j} \{t^{n-i+j}\} = c_{n-i+j} (n-i+j)(n-i+j-1) \dots (n-i+1) t^{n-i},$$

e o coeficiente é então $a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}$.

O coeficiente de t^{n-i} no sistema (*) satisfaz, a soma em ordem decrescente em $j = i, i-1, \dots, 0$,

$$(i) \quad a_i c_m \frac{n!}{(n-i)!} + \dots + a_j c_{n-i+j} \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} + \dots + a_0 c_{n-i} = b_{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Pelas expressões (i) acima obtemos a equação matricial trivialmente resolúvel,

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \frac{n!}{(n-2)!} & a_1 \frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i \frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1} \frac{(n-1)!}{(n-i)!} & \cdot & a_j \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 & 0 \\ a_n n! & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-i} \\ \cdot \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-i} \\ \cdot \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} .$$

(b) Neste caso, a equação é

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_{k+1} x^{(k+1)} = R.$$

Pelo item (a), a equação $a_n y^{(n-k-1)} + \dots + a_{k+1} y = R$, com $k+1 \leq n$, têm solução $y(t) = Q(t)$, com $\text{grau}(Q) = \text{grau}(R)$. Integrando $y = y(t)$ $k+1$ -vezes, e escolhendo em cada integração zero para termo independente, obtemos a solução desejada ■

VIDE VERSO

A FÓRMULA PARA $P\left(\frac{d}{dt}\right)\{Q(t)e^{\gamma t}\}$:

(Regra de Leibnitz). Sejam f e g pertencentes a $C^\infty(\mathbb{R})$. Então,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Prova.

O caso $n = 1$ é trivial: $(fg)' = f'g + fg'$. Supondo a fórmula para n , temos

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \right] = \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} f^{(j+1)} g^{(n-j)} + \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f g^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \blacksquare \end{aligned}$$

Utilizaremos também uma fórmula para as derivadas de um polinômio. Dado

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k t^k,$$

é fácil ver que

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j}.$$

VIDE VERSO

Teorema. Consideremos o operador diferencial com coeficientes constantes

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I.$$

Seja $Q = Q(t)$ uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Então, vale a fórmula

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \{ Q(t)e^{\gamma t} \} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' + p'(\gamma) Q' + p(\gamma) Q \right] e^{\gamma t}.$$

Prova.

Pela regra de Leibnitz segue

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)[Q(t)e^{\gamma t}] = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} [Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} Q^{(j)}(t) \gamma^{k-j} \right] e^{\gamma t}.$$

Finalmente, trocando a ordem no somatório encontramos

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} Q^{(j)} \gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} \gamma^{k-j} \right] \frac{Q^{(j)}}{j!} = \sum_{j=0}^n p^{(j)}(\gamma) \frac{Q^{(j)}}{j!}.$$

Logo,

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{j=0}^n \frac{p^{(j)}(\gamma)}{j!} Q^{(j)} \right] e^{\gamma t}.$$

Vide Verso

Corolário. Consideremos a edo homogênea

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

Se γ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico $p(\lambda)$, então as m funções

$$e^{\gamma t}, te^{\gamma t}, \dots, t^{m-1}e^{\gamma t}$$

são soluções da edo.

Prova.

Utilizemos que $p(\gamma) = p'(\gamma) = \dots = p^{(m-1)}(\gamma) = 0$ e que $\frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0$ se $k > j$.

Computando $P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^j e^{\gamma t})$, com $j = 0, \dots, m-1$, pela fórmula acima obtemos

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(t^j e^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k(\gamma)}{k!} \frac{d^k(t^j)}{dt^k} + \sum_{k=m}^n \frac{p^k(\gamma)}{k!} \frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0 + 0 \blacksquare$$

Conclusão: Dada uma edo com coeficientes constantes e de ordem n , determinando suas raízes características e suas respectivas multiplicidades algébricas encontramos n soluções da edo homogênea.