MAT 133 - CÁLCULO II - IQUSP

2^{o} semestre de 2013

Professor Oswaldo Rio Branco d Oliveira

LIMITES E CONTINUIDADE

Def 1. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função e p é um ponto de acumulação de A então $\lim_{x\to p} f(x) = L$ se $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que : $|f(x) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - p| < \delta$ e $x \in A$.

Teorema 1 (Conservação do Sinal). Seja $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to p} f(x) = L \neq 0$. Se $L > 0$, existe um intervalo $I = (p - \delta, p + \delta)$, $\delta > 0$, tal que $\frac{3L}{2} > f(x) > \frac{L}{2} > 0$ se $x \in (I - \{p\}) \cap A$.

Obs. Temos, é claro, um resultado análogo se $L < 0$.

Prova.

Dado $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$, pela definição de limite existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (p-\delta, p+\delta) - \{p\}$ e $x \in A$ então, $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{L}{2}$. Logo, é fácil ver, $f(x) \in (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2})$ $\blacksquare$

Teorema 2 (Propriedades). Sejam p um ponto de acumulação de A e funções $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$ então,

(a) $\lim_{x\to p} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$.

(b) $\lim_{x\to p} cf(x) = cL_1$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

(c) $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_1 L_2$.

(d) $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$

Prova.

(a) Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\frac{\epsilon}{2}$. Existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} (\,0 < |x - p\,| < \delta_1 \text{ e } x \in A\,) \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \\ (\,0 < |x - p\,| < \delta_2 \text{ e } x \in A\,) \Longrightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}\,. \end{cases}$$

Logo, se $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ e $0 < |x - p\,| < \delta$, com $x \in A$, então, pela desigualdade triangular, $|(f+g)(x) - (L_1+L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

(b) O caso $c = 0$ é óbvio. Se $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ consideremos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, $x \in A$, temos $|f(x) - L_1| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$ e, assim, $|cf(x) - cL_1| < \epsilon$.

(c) Como $\lim\limits_{x \to p} g(x) = L_2$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta_1$, $x \in A$, então $|g(x) - L_2| < 1$; logo, $|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|$. Assim,

$$(1) \quad 0 < |x - p\,| < \delta_1\,(\,x \in A\,) \implies |g(x)| < 1 + |L_2|\ .$$

Então, dado $\epsilon > 0$, e para a função g considerando $\frac{\epsilon}{2(\,|L_1|+1\,)}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$(2) \quad 0 < |x - p\,| < \delta_2\,(\,x \in A\,) \implies |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2(\,|L_1| + 1\,)}\ .$$

Quanto à função f, para o valor de ϵ acima seja $\frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}$. Então, existe $\delta_3 > 0$ tal que,

$$(3) \quad 0 < |x - p| < \delta_3\ (\,x \in A\,) \implies |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2(\,|L_2| + 1\,)}\ .$$

Desta forma, escolhendo $\delta = \min(\delta_1\,, \delta_2\,, \delta_3)$, que é estritamente positivo, se $0 < |x - p| < \delta$ e $x \in A$, (1)(2) e (3) estão satisfeitas e então,

$$|(fg)(x) - L_1L_2| = |[f(x) - L_1]g(x) + [g(x) - L_2]L_1| \leq |[\,f(x) - L_1\,]g(x)| + |[\,g(x) - L_2\,]L_1| \leq$$

$$\leq\ |f(x) - L_1|\,|g(x)| + |g(x) - L_2|\,|L_1|\ ;$$

mas,

$$\begin{cases} |f(x) - L_1|\,|g(x)| \ < \ \frac{\epsilon}{2(\,|L_2|+1\,)}(\,1 + |L_2|\,) = \frac{\epsilon}{2} \\ |g(x) - L_2|\,|L_1| \ \leq \ \frac{\epsilon}{2(\,|L_1|+1\,)}|L_1| < \frac{\epsilon}{2}\ ; \end{cases}$$

donde, $|(fg)(x) - L_1L_2| \ < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

(d) Escrevendo $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$, por (c) vemos que é suficiente mostrarmos $\lim\limits_{x \to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$.

Notemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta_1$ então $|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$ e, portanto, $|L_2| = |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|$ e, assim, $|g(x)| > \frac{|L_2|}{2}$ ou, ainda, $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}$.

Dado então $\epsilon > 0$ consideremos $\frac{\epsilon|L_2|^2}{2}$. Como $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x-p| < \delta_2$, $x \in A$, então $|g(x)-L_2| < \frac{\epsilon|L_2|^2}{2}$ e, consequentemente, para $0 < |x-p| < \delta = \min(\delta_1\,, \delta_2)\,, x \in A$, temos,

$$|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}| = \frac{|g(x)-L_2|}{|g(x)|\,|L_2|} = |g(x)-L_2|\,\frac{1}{|g(x)|}\,\frac{1}{|L_2|} < \frac{\epsilon|L_2|^2}{2}\,\frac{2}{|L_2|}\,\frac{1}{|L_2|} = \epsilon \,\blacksquare$$

Corolário 1. Para todo polinômio $p = p(x)$ e para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ temos $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$.

Prova.

Basta notarmos que $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ e que um polinômio é uma soma de parcelas da forma $a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, e $x^i = x....x$ é o produto do monômio x i-vezes e que, pelas propriedades acima, $\lim\limits_{x\to x_0} a_i x^i = a_i x_0^i$ e então, se $p(x) = a_n x^n + ...a_1 x + a_0$ então,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x\to x_0} a_n x^n + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_0 \\ &= a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0)\blacksquare\end{aligned}$$

Corolário 2. Para toda função racional $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p e q polinômios, se x_0 não é raíz de $q = q(x)$ então $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$.

Prova.

Segue do corolário 1 e do teorema 2(d)$\blacksquare$

Teorema 3 (Do Confronto). Sejam f, g e h três funções, a valores reais, definidas em $A \subset \mathbb{R}$. Suponhamos que p é um ponto de acumulação de A e que exista $\delta > 0$ tal que,

$$g(x) \le f(x) \le h(x)\,, \quad \text{se } x \in (\,p-\delta\,, p+\delta\,) - \{p\} \ \text{ e}, \ x \in A\,.$$

Então, se $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x) = L$, segue que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$.

Prova.

Dado $\epsilon > 0$ existem, respectivamente, para g e h, $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que,

$$\begin{cases} (\,0 < |x - p\,| < \delta_1 \text{ e } x \in A\,) \Longrightarrow |g(x) - L| < \epsilon \\ (\,0 < |x - p\,| < \delta_2 \text{ e } x \in A\,) \Longrightarrow |h(x) - L| < \epsilon\ . \end{cases}$$

Logo, se $\delta = \min(\,\delta_1\,, \delta_2) > 0$ e $0 < |x - p| < \delta$ e, ainda, $x \in A$, temos que $g(x)$ e $h(x)$ pertencem ao intervalo $(L - \epsilon\,, L + \epsilon)$ e, portanto, como $f(x)$ está entre $g(x)$ e $h(x)$, $f(x)$ também pertence ao mesmo intervalo$\blacksquare$

Teorema 4 (Limite da Função Composta). Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ tais que,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0\,, \\ \lim\limits_{y \to y_0} g(y) = L\,, \\ \text{existe } r > 0 \text{ tal que } f(x) \neq y_0 \text{ se } x \in (x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}\ . \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = L\ .$$

Prova.

Como $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$(1) \qquad 0 < |y - y_0| < \delta_1 \text{ e } \ y \in Y \quad \Longrightarrow \ |g(y) - L| < \epsilon\ .$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, para o δ_1 acima existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$(2) \qquad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ e } \ x \in X \quad \Longrightarrow \ |f(x) - y_0| < \delta_1\ .$$

Tomando-se $\delta = \min(\delta_2\,, r)$, por (2) e pela terceira condição nas hipóteses segue que

$$(3) \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \quad \Longrightarrow \quad 0 < |f(x) - y_0| < \delta_1\ .$$

Combinando (3) e (1), nesta ordem, temos então,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X \quad \Longrightarrow \quad |g(f(x)) - L| < \epsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L = \lim_{y \to y_0} g(y) \blacksquare$

Def. $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto de acumulação $x_0 \in X$, se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \ .$$

Obs. Se $x_0 \in X$ não é ponto de acumulação de X, x_0 é dito um ponto isolado de X. Toda função é declarada contínua em seus pontos isolados.

Proposição 1. Os polinômios e as funções racionais são funções contínuas em seu domínio.

Prova.

Segue da definição de continuidade e dos corolários 1 e 2 $\blacksquare$

Teorema 5. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ tais que, $\lim_{x \to x_o} f(x) = y_0$ e g é contínua em x_0 . Então,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \ .$$

Prova.

Como g é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que,

$$|y - y_0| < \delta_1 \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \ .$$

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, para o δ_1 acima existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 \ .$$

Combinando as duas afirmações acima temos,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \blacksquare$$

Corolário 3. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$. Então, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é contínua em x_0.

Prova.

Segue imediatamente do teorema 5 ■

Corolário 4. Se $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em $p \in X$ então, $f + g$, $f.g$ e cf $(c \in \mathbb{R})$, são contínuas em p. Ainda mais, se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$, definida no conjunto em que g não se anula, também é contínua em p.

Verificação: Consequência imediata das propriedades dos limites ■

APLICAÇÕES

1. **(1º Limite Fundamental)** $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{sen\,\theta}{\theta} = 1$.

   Verificação: Feita em aula.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

   Verificação: Feita em aula.

3. **(2º Limite fundamental)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

   Verificação: Mudando à variável $h = e^x - 1$, $h \to 0$, obtemos $e^x = h + 1$, $x = \ln(h + 1)$ e,

   $$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{h}{\ln(h+1)} = \frac{1}{\frac{1}{h}\ln(h+1)} = \frac{1}{\ln(h+1)^{\frac{1}{h}}}.$$

   Para $y = \frac{1}{h}$ temos, $y \to \pm\infty$ segundo h tende a zero pela direita ou esquerda e,

   $$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{y})^y} ;$$

   mas, por 2, acima, $\lim\limits_{y\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$ e, **assumindo** que a função exponencial é contínua (e portanto, sua inversa, a função logaritmo também),

   $$\lim_{y\to\pm\infty} \ln(1 + \frac{1}{y})^y = \ln e = 1 ,$$

   e assim,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to\pm\infty} \ln(1 + \frac{1}{y})^y = 1 .$$

4. $f(x) = sen\, x,\ x \in \mathbb{R}$ é contínua.

   Verificação: Pelas fórmulas de prostáferese, $sen\, x - sen\, p = 2sen\frac{x-p}{2}\cos\frac{x+p}{2}$. Assim, como $|\cos(x)| \leq 1,\ \forall x$, e, como já vimos na demonstração do 1º limite fundamental, $|sen\, x\,| \leq |x|,\ \forall x$, segue que,

$$0 \leq\ |sen\, x - sen\, p\,| = 2|sen\frac{x-p}{2}\cos\frac{x+p}{2}| \leq 2|\frac{x-p}{2}| = |x-p\,|\,.$$

   Logo, pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{x\to p}|sen\, x - sen\, p| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to p} sen\, x = sen\, p$.

5. $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$ é contínua.

   Verificação: Pelas fórmulas de prostáferese, $\cos x - \cos p = -2sen(\frac{x+p}{2})\, sen(\frac{x-p}{2})$. Assim, como $|sen\, x\,| \leq 1,\ \forall x$, e ainda, $|sen\, x\,| \leq |x|,\ \forall x$, segue que,

$$0\ \leq\ |\cos x - \cos p\,| \leq 2|sen\frac{x+p}{2}\, sen\frac{x-p}{2}| \leq 2\frac{|x-p|}{2} = |x-p|\,.$$

   Logo, analogamente ao exemplo 4, $\lim\limits_{x\to p}\cos x = \cos p$.

6. Se $a > 0$, $f(x) = a^x$ é contínua.

   Verificação: Temos, $f(x) = a^x = e^{x\ln a} = (g\circ h)(x)$, como $h(x) = x\ln a$ e $g(y) = e^y$. Portanto, como g e $h$são funções contínuas, pelo corolário 3, $f = g\circ h$ é também contínua.

7. $f(x) = \sqrt[n]{x}\,, x \geq 0$ é contínua.

   Verificação: Mostremos que $\lim\limits_{x\to p}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$. Suponhamos, inicialmente, $p > 0$.

   Como $a^n - b^n = (a-b)(\,a^{n-1} + ... + a^{n-1-i}b^i + ... + b^{n-1}\,)$, se $a = \sqrt[n]{x}$ e $b = \sqrt[n]{p}$, temos,

$$x - p = (\,\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p})[\,\sqrt[n]{x^{n-1}} + ... + \sqrt[n]{x^{n-1-i}}\,\sqrt[n]{p^i} + ... + \sqrt[n]{p^{n-1}}\,]\,.$$

   Assim, se $0 < \delta_1 < \frac{p}{2}$ e $|x-p\,| < \delta_1 = \frac{p}{2}$ então, é fácil ver, $x > \frac{p}{2}$ e

$$[\,\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+\sqrt[n]{x^{n-1-i}}\,\sqrt[n]{p^i}+...+\sqrt[n]{p^{n-1}}\,] > (\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}+...+(\frac{p}{2})^{\frac{n-1-i}{n}+\frac{i}{n}}+...+(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}} = n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}\,,$$

$$|x-p\,|\ >\ |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}\,|\ n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}\,,$$

e, portanto, $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}\,| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\ |x - p\,|$.

Consequentemente, dado $\epsilon > 0$, considerando $\delta = \min\left(\delta_1\,,\ \epsilon\, n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}\right)$ temos,

$$|x-p| < \delta \implies |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}\,| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}}|x-p\,| < \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\,\delta \leq \frac{1}{n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}}}\,\epsilon\, n(\frac{p}{2})^{\frac{n-1}{n}} = \epsilon\,.$$

Logo, $\lim\limits_{x\to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$, se$p > 0$.

Se $p = 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \epsilon^n$. Se $0 \leq x < \delta$ temos $0 \leq \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\delta} = \epsilon$ e, assim, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$.

8. $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$, com $p,\ q \in \mathbb{Z}$, $mdc(p\,, q) = 1$, é contínua em $(0, +\infty)$.

   Verificação: Temos $f(x) = (g \circ h)(x)$, com $h(x) = \sqrt[q]{x}$ e $g(y) = y^p$, que são contínuas em $(0, +\infty)$, pelo exemplo 7 e pela proposição 1, respectivamente. Logo, como composição de funções contínuas é também uma função contínua, f é contínua.

9. As funções trigonométricas $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, cossec$x$ são contínuas em seus domínios.

   Verificação: Consequência imediata dos exemplos 4 e 5 e do corolário 4.