

# MAT 130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

- 1 semestre de 2013 - IMEUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

## FRAÇÕES PARCIAIS<sup>1</sup>

**Idéia.** Consideremos uma divisão de polinômios

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

ambos com coeficientes reais e, ainda,  $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$ . O objetivo é escrever este quociente como um **somatório** de parcelas “bem mais simples”. Procedemos da seguinte forma. Decompondo o polinômio  $Q$  como um produto de fatores lineares do tipo  $(x - \alpha)^m$ , com  $\alpha$  uma raiz real de  $Q$  e  $m = m(\alpha)$  a multiplicidade algébrica de tal raiz de  $Q$ , e também de fatores quadráticos  $(x^2 + ax + b)^n$ , onde o polinômio  $x^2 + bx + c$  não tem raízes reais (discriminante negativo) e  $n$  é a multiplicidade algébrica de tal polinômio, temos que:

(1 ) Cada fator linear  $(x - \alpha)^m$  gera as  $m$  parcelas (no somatório procurado)

$$\frac{C_1}{(x - \alpha)}, \dots, \frac{C_m}{(x - \alpha)^m},$$

onde  $C_1, \dots, C_m$  são constantes reais a serem determinadas.

(2 ) Cada fator quadrático  $(x^2 + bx + c)^n$  gera as  $n$  parcelas (no referido somatório)

$$\frac{A_1x + B_1}{(x^2 + bx + c)}, \dots, \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + bx + c)^n},$$

onde as constantes  $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n$  são reais e a serem determinadas.

(3 ) A resposta procurada (isto é, o somatório) é então: o quociente  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  é uma soma de parcelas do tipo das obtidas no (1 ) e no (2 ) passos acima.

(4 ) Para determinarmos as constantes reais surgidas existem vários métodos.

---

<sup>1</sup>O teorema que segue baseia-se em dois resultados em “Analysis by Its History, E. Hairer and G. Warner, Undergraduate Texts in Mathematics, 1996, pp. 118-123, Springer-Verlag, New York”. Os exemplos (dois deles do citado livro) são, entre outras formas, aqui resolvidos inspirando-nos no chamado **método de Heaviside**, vide “Cálculo, Vol 1, pp. 568-569, G. B. Thomas, Addison Wesley, 2009”.

**Exemplo 1.** Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

**Resolução:** Efetuando a divisão polinomial obtemos uma função racional com o grau do polinômio numerador menor que o no denominador, e fatorando este,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Pelo método acima temos,

$$(*) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando (\*) por  $(x-1)^3$  e então computando em  $x = 1$  obtemos  $A_3 = 1$ .

Multiplicando (\*) por  $(x+2)^2$  e então computando em  $x = -2$  obtemos  $B_2 = -1$ .

Pondo os termos  $1(x-1)^{-3}$  e  $-1(x+2)^{-2}$  à direita à esquerda e simplificando,

$$(**) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19 + (x-1)^3 - (x+2)^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{6x^2 - 5x - 7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2}.$$

Multiplicando (\*\*) por  $(x-1)^2$  e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em  $x = 1$  obtemos  $A_2 = -2$ .

Multiplicando (\*\*) por  $(x+2)$  e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em  $x = -2$  obtemos  $B_1 = 3$ .

Pondo, em (\*\*), os termos  $-2(x-1)^{-2}$  e  $3(x+2)^{-1}$  que estão no lado direito no meio e então simplificando obtemos:

$$\frac{6x^2 - 5x - 7 + 2(x+2) - 3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3}{x-1} = \frac{A_1}{x-1} \Rightarrow A_1 = 3.$$

**Resposta:**  $\frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$  ■

Antes de darmos mais exemplos provemos o teorema.

### Demonstração do Teorema da Decomposição em Frações Parciais

Seja  $\mathbb{R}[x]$  o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e na variável  $x$ .

Seja  $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$  com  $r$  distintos pares de raízes complexas conjugadas (não reais)  $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$  e  $s$  distintas raízes reais  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ . Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)<sup>2</sup> podemos fatorar  $Q$  em seus fatores lineares e quadráticos, com suas respectivas multiplicidades algébricas, e obtemos

$$Q(x) = c \prod_{j=1}^r \left( (x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{m_j} \prod_{j=1}^s (x - \gamma_j)^{n_j}, \quad c \in \mathbb{R},$$

onde  $m_j$  e  $n_j$  são as multiplicidades das raízes complexas e reais, respectivamente.

**Teorema 1.** Seja  $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$  como acima e  $P = P(x) \in \mathbb{R}[x]$  tal que  $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$ . Existem, e são únicos, números reais  $A_{jk}$ ,  $B_{jk}$  e  $C_{jk}$  tais que

$$(1.1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{jk} + B_{jk}x}{\left( (x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^k} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{C_{jk}}{(x - \gamma_j)^k}.$$

**Prova.** Vide verso.

---

<sup>2</sup>D'Alembert em 1746 e que à época procurava métodos para integrar funções racionais apresentou uma prova do TFA que foi, à época, considerada não válida e que hoje é válida. Gauss em 1799 apresentou a mais famosa prova de tal teorema e Argand em 1814 mostrando a eficiência dos números complexos simplificou, e muito, a prova de D'Alembert e apresentou a mais clara e curta prova do TFA, até a atualidade.

**Afirmção 1:** Se  $\gamma$  é raiz real de multiplicidade  $n$  de  $Q = Q(x)$  fatoramos  $Q(x) = (x - \gamma)^n q(x)$ , com  $q \in \mathbb{R}[x]$  e  $q(\gamma) \neq 0$ , e existem únicos  $C \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{R}[x]$ , com  $\partial(p) < \partial(Q) - 1$ , satisfazendo

$$(1.2) \quad \frac{P(x)}{(x - \gamma)^n q(x)} = \frac{C}{(x - \gamma)^n} + \frac{p(x)}{(x - \gamma)^{n-1} q(x)}.$$

### Verificação da Afirmção 1.

Multiplicando (1.2) pelo denominador comum, temos a equação polinomial

$$P(x) = Cq(x) + p(x)(x - \gamma).$$

Avaliando em  $x = \gamma$  temos  $C = \frac{P(\gamma)}{q(\gamma)}$  e definimos  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  como a divisão (exata) de  $P(x) - Cq(x)$  por  $(x - \gamma)$ . As unicidades de  $C$  e  $p = p(x)$  são óbvias.

**Afirmção 2.** Se  $Q(x) = ((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m q(x)$  e  $q(\alpha + i\beta) \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$ , existem únicos  $A, B \in \mathbb{R}$  e polinômio  $p \in \mathbb{R}[x]$ ,  $\text{grau}(p) < \text{grau}(Q) - 2$ , tais que

$$\frac{P(x)}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^m q(x)} = \frac{A + Bx}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^m} + \frac{p(x)}{\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)^{m-1} q(x)}.$$

### Verificação da Afirmção 2.

Multiplicando pelo denominador comum, resolvemos a equação polinomial

$$P(x) = (A + Bx)q(x) + p(x)\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right).$$

Avaliando tal fórmula em  $z_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  (ou  $z_0 = \alpha - i\beta$ ) determinamos  $A$  e  $B$  reais<sup>3</sup> e definimos  $p(x)$  como a divisão exata, em  $\mathbb{R}[x]$ , de  $P(x) - (A + Bx)q(x)$  por  $\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right)$ . A unicidade é elementar e encerra tal verificação.

Claramente, por sucessivas aplicações das Afirmções 1 e 2 obtemos (1.1). Pedimos ao leitor mostrar, é trivial, que a unicidade dos coeficientes em (1.1) (vide abaixo outra prova de tal fato) segue das unicidades nas Afirmções 1 e 2 ■

---

<sup>3</sup>Pela equação  $A + B(\alpha + i\beta) = \frac{P(z_0)}{q(z_0)} \in \mathbb{C}$  temos  $A + B\alpha = \text{Re}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right)$  e  $B\beta = \text{Im}\left(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\right)$ . Se utilizarmos  $z = \alpha - i\beta$  o resultado é o mesmo pois para tais  $A, B \in \mathbb{R}$ :  $A + B\bar{z}_0 = \overline{A + Bz_0} = \overline{\frac{P(z_0)}{q(z_0)}}$

Mostremos uma variação do **Método de Heaviside** (assim dito se  $Q(x)$  só tem raízes reais simples) para determinar (unicamente) os coeficientes em (1.1).

Computemos os coeficientes  $C_{1n_1}, C_{1,n_1-1}, \dots, C_{1,2}, C_{1,1}$ , nesta ordem.

Utilizando a fatoração  $Q(x) = (x - \gamma_1)^{n_1} Q_1(x)$ ,  $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q_1(\gamma_1) \neq 0$ , multipliquemos (1.1) por  $(x - \gamma_1)^{n_1}$  e computemos a equação obtida em  $x = \gamma_1$ . Para o 1 membro  $\left(\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1} Q_1(x)}\right)$  obtemos, é óbvio,  $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}$ . Quanto ao 2 membro, multiplicando a parcela  $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$  por  $(x - \gamma_1)^{n_1}$  e computando o resultado em  $x = \gamma_1$  obtemos  $C_{1,n_1}$ ; todas as demais parcelas ao serem multiplicadas por  $(x - \gamma_1)^{n_1}$  e o resultado computado em  $x = \gamma_1$  produzem o número zero. Logo,

$$C_{1,n_1} = \frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} .$$

Então, passando  $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$  ao 1 membro e efetuando a subtração temos uma função racional com numerador e denominador divisíveis por  $(x - \gamma_1)$  (Afirm. 1):

$$\frac{P(x)}{(x - \gamma_1)^{n_1} Q_1(x)} - \frac{C_{1,n_1}}{(x - \gamma_1)^{n_1}} = \frac{p_1(x)}{(x - \gamma_1)^{n_1-1} Q_1(x)} , \text{ com } \partial(p_1) < \partial(Q) - 1 .$$

Igualado o último membro acima com o que restou do 2 membro de (1.1), recaímos no caso anterior e então de forma análoga achamos o coeficiente  $C_{1,n_1-1}$ . Iterando tal procedimento identificamos os demais coeficientes  $C_{1,j's}$ . É claro que analogamente obtemos todos os coeficientes  $C_{i's,j's}$ .

Similarmente (e utilizando a Afirmção 2) obtemos ordenadamente os pares de coeficientes  $(A_{i,m_i}, B_{i,m_i}), (A_{i,m_i-1}, B_{i,m_i-1}), \dots, (A_{i,1}, B_{i,1})$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Verifique■

**Exemplo 2.** Decomponha em frações simples  $\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$ .

**1 Resolução:** Via o que denominamos, aqui, variação do método de Heaviside.

Pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples temos,

$$(*) \quad \frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando (\*) por  $(x^2+2)^2$  e então computando em  $x = i\sqrt{2}$  obtemos

$$\frac{(i\sqrt{2})^5 + i\sqrt{2}}{-1} = Ei\sqrt{2} + F \implies E = -5 \text{ e } F = 0.$$

Pondo à esquerda em (\*) o termo  $\frac{-5x}{(x^2+2)^2}$  obtido à direita e simplificando temos

$$(**) \quad \frac{x^5+x+5x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Multiplicando (\*\*) por  $x^2+1$  e então computando a expressão no meio em  $x = i$ :

$$\frac{i^3+3i}{i^2+2} = Ai+B \implies A = 2 \text{ e } B = 0.$$

Multiplicando (\*\*) por  $x^2+2$  e então computando a expressão no meio em  $x = \sqrt{2}i$ :

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3+3\sqrt{2}i}{-2+1} = C\sqrt{2}i+D \implies C = -1 \text{ e } D = 0.$$

**2 Resolução.** Vide verso

Escrevemos  $P(x) = x^5 + x$ ,  $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2$  e,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 2} + \frac{ex + f}{(x^2 + 2)^2}, \forall x \in \mathbb{R},$$

e então, multiplicando ambos os membros por  $p(x)$  resulta

$$(x^5 + x) = (ax + b)(x^2 + 2)^2 + (cx + d)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + (ex + f)(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Efetuando as operações indicadas no 2º membro, a igualdade acima se escreve

$$x^5 + x = (a+c)x^5 + (b+d)x^4 + (4a+3c+e)x^3 + (4b+3d+f)x^2 + (4a+2c+e)x + 4b+2d+f, \forall x \in \mathbb{R},$$

e (v. Corolário 3.7) obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

$$\begin{aligned} (1) \quad a + c = 1, & \quad (2) \quad b + d = 0, & \quad (3) \quad 4a + 3c + e = 0, & \quad (4) \quad 4b + 3d + f = 0, \\ (5) \quad 4a + 2c + e = 1, & \quad (6) \quad 4b + 2d + f = 1. \end{aligned}$$

De (2) segue  $d = -b$  e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente,  $b + f = 0$  e  $2b + f = 0$  que é visivelmente um sistema determinado; donde,  $b = f = 0$  e, então,  $d = 0$ . De (1) segue  $c = 1 - a$  e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente,  $a + e = -3$  e  $2a + e = -1$ ; cuja solução é  $a = 2$  e  $e = -5$  e portanto,  $c = 1 - a = 1 - 2 = -1$  donde  $c = -1$ . Consequentemente,

$$\frac{x^5 + x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)^2} = \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{5x}{(x^2 + 2)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

**Exemplo 3.** Decomponha em frações simples  $\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$ .

**Resolução:** Via método de Heaviside.

O denominador fatora-se:  $(x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 3)$ .

Logo, temos

$$(*) \quad \frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x + 3}.$$

Multiplicando (\*) por  $(x + 1)$  e, aí, computando em  $x = -1$  temos:  $A = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ .

Multiplicando (\*) por  $(x - 1)$  e, aí, computando em  $x = 1$  temos:  $B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ .

Multiplicando (\*) por  $(x + 2)$  e, aí, computando em  $x = -2$  temos:  $C = \frac{5}{3}$ .

Multiplicando (\*) por  $(x + 3)$  e, aí, computando em  $x = -3$  temos:  $D = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$  ■

Antes de estudarmos o caso em que  $Q(x)$  tem raízes não reais revisemos  $\mathbb{C}$ .

## Revisão de Números Complexos.

Seja  $i \in \mathbb{C}$  tal que  $i^2 = -1$ . Utilizando a **Fórmula de Euler**,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

temos

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Indicando as **coordenadas polares** de  $z \in \mathbb{C}$  por  $r \in [0, +\infty)$  e  $\theta \in \mathbb{R}$  se:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

vemos que  $z = re^{i\theta}$ , sendo óbvio que  $|e^{i\theta}| = 1$  e conseqüentemente  $r = |z|$ .

Chamamos  $(r, \theta)_o$  de **forma polar** de um número  $z \in \mathbb{C}$  e identificamos:

$$z = (r, \theta)_o \quad \text{se} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Desta forma, se  $z_1 = (r_1, \theta_1)_o$  e  $z_2 = (r_2, \theta_2)_o$  temos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  e

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)_o.$$

Assim, obtemos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{se} \quad z = (r, \theta)_o, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Invertendo tal fórmula obtemos as  $n$ -raízes,  $n \in \mathbb{N}$ , de um número  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$  :

**Radiciação:** Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $z = re^{i\theta} \neq 0$ , as  $n$  soluções de  $\omega^n = z = re^{i\theta}$  são

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{ou}$$

$$\omega_k = \left( \sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)_o = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Chamamos tais soluções  $\omega_k, k = 0, \dots, n-1$ , de **raízes  $n$ -ésimas de  $z$** .



**Exemplo 4.** Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

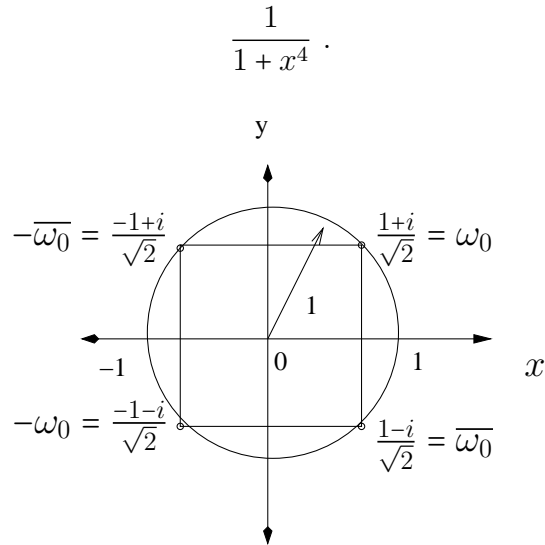


Figura 1: As quatro raízes quartas de  $z = -1$ .

**Três Resoluções:** Temos, vide Figura 1 acima,

$$z^4 + 1 = 0 \implies z^4 = -1 = e^{i\pi} \implies z = \omega_k = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})i} = e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})i}, \quad k = 0, 1, 2, 3 ;$$

isto é,  $z \in \left\{ \omega_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}, \omega_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\overline{\omega_0}, \omega_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\omega_0, \omega_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \overline{\omega_0} \right\}$ .

O polinômio  $x^4 + 1$  fatora-se então como

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1),$$

e obtemos pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples,

$$(*) \quad \frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} .$$

**1 Resolução:** Não aplicando os citados métodos.

É fácil perceber que,

$$A + C = 0 \quad \text{e} \quad B + D = 1 .$$

Ainda, computando a expressão em (\*) em  $x = i$  obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{Ai+B}{-\sqrt{2}i} + \frac{-Ai+(1-B)}{\sqrt{2}i} = \frac{-2A}{\sqrt{2}} + \frac{1-2B}{\sqrt{2}i} \implies A = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2} \implies C = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{e} \quad D = \frac{1}{2} .$$

**2 Resolução:** Via método dos coeficientes a determinar (aritmética em  $\mathbb{R}$ )

Multiplicando por  $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$  a expressão (\*) obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\ &= (A + C)x^3 + (A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D)x^2 + (A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2})x + (B + D), \end{aligned}$$

e resolvemos o sistema de equações

$$A + C = 0, \quad A\sqrt{2} + B - C\sqrt{2} + D = 0, \quad A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0 \quad \text{e} \quad B + D = 1.$$

Substituindo a 1 ( $C = -A$ ) e a 4 equações na 2 temos  $2A\sqrt{2} + 1 = 0$  e  $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Substituindo a 1 equação na 3 obtemos  $B = D$  e, pela 4 equação,  $B = D = \frac{1}{2}$ .

**3 Resolução:** Via uma variação do método de Heaviside (aritmética em  $\mathbb{C}$ ).

Escrevamos  $\frac{1}{1+x^4}$  na forma

$$(**) \quad \frac{1}{(x - \omega_0)(x - \bar{\omega}_0) \cdot (x + \bar{\omega}_0)(x + \omega_0)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Multiplicando (\*\*) por  $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = (x - \omega_0)(x - \bar{\omega}_0)$  e computando em  $\omega_0$ :

$$\frac{1}{2 \operatorname{Re}(\omega_0) \cdot 2\omega_0} = A\omega_0 + B \implies \frac{1}{4 \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{A}{\sqrt{2}}(1+i) + B \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{2(1+i)} = \frac{1-i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} + B\right) + \frac{A}{\sqrt{2}}i \implies A = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando (\*\*) por  $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x + \bar{\omega}_0)(x + \omega_0)$  e computando em  $-\omega_0$ :

$$\frac{1}{-2\omega_0(-\omega_0 - \bar{\omega}_0)} = -C\omega_0 + D \quad \text{ou,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0 \operatorname{Re}(\omega_0)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i = \left(-\frac{C}{\sqrt{2}} + D\right) - \frac{C}{\sqrt{2}}i \implies C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

**Resposta:**  $\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \blacksquare$

Por fim, apresentemos o “método das derivadas” (importante em “Teoria de uma Variável Complexa”) que utiliza derivadas em  $\mathbb{R}$  para computar os coeficientes em (1.1) correspondentes às parcelas provenientes das raízes reais.

Computemos em (1.1) os coeficientes  $C_{1,n_1}, \dots, C_{1,1}$  relativos à raiz  $\gamma_1$ . Para simplificar escrevamos  $n_1 = n$ . Então, pela fatoração  $Q(x) = (x - \gamma_1)^n Q_1(x)$ ,  $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$  e  $Q_1(\gamma_1) \neq 0$ , pela expressão em (1.1) temos,

$$\frac{P(x)}{(x - \gamma_1)^n Q_1(x)} = \frac{C_{1,n}}{(x - \gamma_1)^n} + \frac{C_{1,n-1}}{(x - \gamma_1)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{1,1}}{(x - \gamma_1)^1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)},$$

com  $p_1 \in \mathbb{R}[x]$  [e, é fácil ver,  $\partial(p_1) < \partial(Q) - n$ ]. Logo, multiplicando por  $(x - \gamma_1)^n$ ,

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = C_{1,n} + C_{1,n-1}(x - \gamma_1) + C_{1,n-2}(x - \gamma_1)^2 + \dots + C_{1,1}(x - \gamma_1)^{n-1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)}(x - \gamma_1)^n.$$

Computando a equação acima em  $\gamma_1$  resulta  $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} = C_{1,n}$ .

Computando a 1ª derivada da equação acima em  $\gamma_1$  resulta:  $\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\gamma_1) = C_{1,n-1}$ .

Computando a 2ª derivada da equação acima em  $\gamma_1$  resulta:  $\left(\frac{P}{Q_1}\right)''(\gamma_1) = 2C_{1,n-2}$ .

Por indução finita, computando a  $k$ -ésima derivada,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , da equação acima em  $\gamma_1$  obtemos:  $\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1) = k!C_{1,n-k}$ . Isto é,  $C_{1,n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1)$ .

**Exemplo 5.** Decomponha em frações simples  $\frac{x^2}{(x-1)^3}$ .

**Três resoluções:**

**1 Resolução:** Não aplicando os citados métodos.

Temos,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{[(x-1)+1]^2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}.$$

**2 Resolução:** Via método dos coeficientes a determinar.

Multiplicando por  $(x-1)^3$  a decomposição

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

obtemos  $x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)$ . Logo,  $A = 1$ ,  $B = 2$  e  $C = 1$ .

**3 Resolução:** Empregando derivadas.

Basta computar mos as derivadas de ordem 0, 1 e 2 de  $F(x) = x^2$  em  $x = 1$ .

Logo,

$$C = \frac{F(1)}{0!} = 1, \quad B = \frac{F'(1)}{1!} = 2 \quad \text{e} \quad A = \frac{F''(1)}{2!} = 1 \quad \blacksquare$$

Existem ainda outros métodos para decompor uma função racional em soma de frações simples. Cada qual tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão e, é claro, de preferências individuais. Ainda, é conveniente ser “criativo”.