$4^{\underline{a}}$ Lista de MAT130 - Equações Diferenciais e Aplicações- IMEUSP
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2024
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. a) Resolva a equação $\dfrac{dx}{dt} = x^2 t$.

   b) Esboce o gráfico das soluções.

   c) Determine as soluções com condição inicial dada:

   i) $x(1) = 0$ ii) $x(0) = 1$ iii) $x(0) = -1$

2. Mostre que as equações abaixo não são exatas mas que ou tem um fator integrante dependendo de x ou então um dependendo de y. A seguir, resolva-as.

   (a) $(3y^2 - x^2 + 1)dx + 2xydy = 0$.

   (b) $xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

   (c) $(x^2 + y^2)dx + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$.

3. Determine condições para que a equação

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

   admita um fator integrante da forma

$$u(x, y) = h(t), \quad \text{com } t = xy.$$

   A seguir, resolva a equação

$$(2y^2 + 2y)dx + (3xy + 2x)dy = 0.$$

4. Determine um fator integrante e resolva

   (a) $(x^2 + 2)dx + 3x^2ydy = 0$.

   (b) $3ydx - xdy = 0$.

   (c) $(2x + 3y)dx + xdy = 0$.

   (d) $(3xy - 4y) + (2x^2 - 4x)dy = 0$.

5. Determine a solução geral das seguintes edo's:

   (a) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{xy}$ (b) $x^3 + 2xy^2 - 3x^2yy' = 0$.

6. Ache a solução geral da seguinte equação sabendo que $y_1 = \frac{2}{x}$ é solução particular

$$y' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2.$$

7. Resolva as equações de variáveis separáveis

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{x}, x > 0$ b) $\dfrac{dv}{dt} = 4 - v^2$

8. Resolva as equações lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem

a) $\dfrac{dT}{dt} = -2(T-3)$ b) $\dfrac{dy}{dx} = -2y + cosx$

9. Uma partícula de massa $m = 1$ desloca-se sobre o eixo $0x$ sob a ação da força elástica $-x\vec{i}$ e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $-2\,\dot{x}\,\vec{i}$. Determine a posição $x = x(t), t \geq 0$, da partícula no instante t e discuta o movimento, supondo

a) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\ (0) = 0$

b) $x(0) = 1$ e $\dot{x}\ (0) = -2$

10. Resolva as equações.

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$ (b) $x'' + x' + x = 0$.

(c) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (d) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

(e) $x'' - 6x' + 9x = 0$ (f) $y'' - 2y' + 6y = 0.$

11. Consideremos a equação diferencial ordinária linear com coeficientes constantes, $\left(\dfrac{d}{dt} - \alpha I\right)^4 x = 0$ com α real. Mostre que as soluções são $x(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + c_3t^2e^{\alpha t} + c_4t^3e^{\alpha t}$, com $c_i's \in \mathbb{R}$.

12. Mostre que $e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \ldots, t^{n-1}\alpha t$, são soluções de $\left(\dfrac{d}{dt} - \alpha I\right)^n x = 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.