

O NÚMERO e

Primeiro semestre de 2024 - diurno

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Proposição 1. *A sequência numérica $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, onde*

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é crescente e satisfaz a desigualdade $a_n < 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência numérica $(a_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente e limitada e portanto convergente a um número real.

Prova.

É claro que $n! = 1.2.3 \dots (n-1)n \geq 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \text{ e}$$

$$1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \clubsuit$$

Proposição 2. *A sequência numérica*

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é crescente e limitada por 3. Logo, tal sequência é convergente a um número real.

Ainda mais, tal sequência numérica satisfaz

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Prova.

Pelo binômio de Newton temos,

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{1}{n^p}.$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p , para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots 2.1}{(n-p)!} \frac{1}{p!} = [n \dots (n-p+1)] \frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$(*) \quad \binom{n}{p} \frac{1}{n^p} = \frac{n \dots (n-p+1)}{n^p} \frac{1}{p!} = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n} \right) \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{p!}.$$

As $n + 1$ parcelas da forma

$$\binom{n}{p} \frac{1}{n^p}$$

presentes na expansão de

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

são múltiplas positivas de

$$\frac{1}{p!}.$$

Se n cresce, o número de parcelas e o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ crescem e assim a sequência numérica $(b_n)_{\mathbb{N}}$ é crescente.

Por outro lado, a identidade (*) garante

$$b_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Pela Proposição 1 então segue $b_n < 3$, para todo n .

Logo, a sequência numérica (b_n) converge a um número real $\clubsuit$

Teorema 3. *Vale a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Prova.

◇ **A desigualdade direta.** Na Proposição 2 vimos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Donde segue a desigualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Está provada a desigualdade direta.

◊ **A desigualdade reversa.** Observemos que

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} \frac{1}{n^p} \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Fixemos m tal que $m \leq n$. Então segue

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq \\ &\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).\end{aligned}$$

A seguir, impondo $n \rightarrow +\infty$ concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

A seguir, impondo $m \rightarrow +\infty$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}\right).$$

Isto é, provamos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}\right) \spadesuit$$

Definição. O número de Euler é

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}\right).$$