Prova de Recuperação de MAT121 - Cálculo II - IO-USP
12/02/2015

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Compute as integrais abaixo.

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$(b) \quad \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Solução.

2. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

(b) Determine as derivadas parciais de f (se existirem) em cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifique.

(d) Determine se a função f é diferenciável em $(0,0)$.

Solução.

(a) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a função f é o quociente de dois polinômios (contínuos) com o denominador não se anulando. Logo, f é aí contínua.
Na origem temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1, \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Assim, pelo teorema do confronto segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Donde, f é também contínua na origem. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) É fácil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, as derivadas parciais de f são quocientes de polinômios com o denominador não se anulando. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas aí. Logo, por um teorema provado em aula, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) Quanto à origem, analisemos se é zero ou não o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \; - \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Se $h = k > 0$ obtemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{2\sqrt{2}h^2|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Logo, f não é diferenciável na origem■

3. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, a função

$$F(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z.$$

Determine:

(a) Os pontos críticos.

(b) Os pontos de máximo e mínimo locais e pontos de sela, se existirem.

(c) Os pontos de máximo e mínimo globais (absolutos), se existirem.

Solução. Os pontos críticos de F são dados por

$$\vec{\nabla} F(x,y,z) = \left\langle 3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y, 2z - 4 \right\rangle = \langle 0,0,0 \rangle .$$

Donde segue,

$$z = 2,\ y = -x \text{ e } 0 = 3x^2 - 2x - 5 = 3(x+1)\left(x - \frac{5}{3}\right).$$

Logo, os pontos críticos são

$$P = (-1,1,2) \ \text{ e } \ Q = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right).$$

- $\diamond$ A matriz hessiana de F em $(-1,1,2)$ é

$$\mathcal{H}F(P) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cuja diagonal troca de sinais. Logo, $(-1,1,2)$ **é ponto de sela**.

- $\diamond$ A matriz hessiana de F em $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ é

$$\mathcal{H}F(P) = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cujos menores principais são $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 20 - 4 = 16 > 0$ e $\Delta_3 = 32 > 0$. Logo, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ **é um ponto de mínimo local estrito**.

- $\diamond$ Temos,

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x,0,0) = \lim_{x \to \pm\infty} x(x^2+5) = \pm\infty.$$

Logo, F não admite pontos de máximo ou de mínimo globais$\blacksquare$

4. Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) & = 1888, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ G(x, y(x), z(x)) & = 1910, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (1, y(1), z(1)) & = (1, 1, 1). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 2, & \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 3, & \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 4, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(1,1,1) = 5, & \frac{\partial G}{\partial y}(1,1,1) = 6, & \frac{\partial G}{\partial z}(1,1,1) = 7. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(1) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(1).$$

Solução.

Pela regra da cadeia temos, derivando as duas primeiras equações do sistema acima em relação a x e avaliando as derivadas em $x = 0$,

$$\begin{cases} F_x(1,1,1).1 + F_y(1,1,1)y'(1) + F_z(1,1,1)z'(1) = 0 \\ \\ G_x(1,1,1).1 + G_y(1,1,1)y'(1) + G_z(1,1,1)z'(1) = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores dados obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Então, pela regra de Cramer,

$$y'(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}} = -2 \quad \text{e} \quad z'(1) = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}} = 1 \ \blacksquare$$

5. (a) Esboce o conjunto

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\}.$$

(b) Determine (se existirem) os pontos de máximo e mínimo (locais e absolutos) e de sela de

$$f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5,$$

restrita ao conjunto K, e os valores nos pontos de máximo e de mínimo.

Solução.

Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\overrightarrow{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; 2x + 3y - 1 = 0 \text{ e } 9x + 4y - 5 = 0.$$

O único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana é

$$\mathcal{H}f(P_0) = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e $\det \mathcal{H}f(P_0) < 0$. Logo, P_0 é de sela e f não tem extremante local em $\text{int}(K)$. Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \;\cup\; \{1\} \times [-1,1] \;\cup\; [-1,1] \times \{-1\} \;\cup\; [-1,1] \times \{1\}\ .$$

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem:

- ◇ No segmento $\{-1\}\times\,]-1,1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.
- ◇ No segmento $\{1\}\times\,]-1,1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.
- ◇ No segmento $]-1,1[\,\times\{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que também descartamos.
- ◇ No segmento $]-1,1[\,\times\{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta. Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. O único ponto de mínimo absoluto é $(-1,+1)$ e $f(-1,+1) = -7$ é o valor mínimo absoluto. O único ponto de máximo absoluto é $(-1,-1)$ e o valor máximo absoluto é $f(-1,-1) = 49$. O ínico ponto de sela é

$$\left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right) \quad \text{e } f\left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right) = \frac{2413}{361} \blacksquare$$