$3^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II - MAT121 - IOUSP
3/12/2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________GABARITO__________________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = xy.$$
   (a) Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto no gráfico de f. Determine a equação do plano π_{P_0} tangente ao gráfico de f no ponto P_0.
   (b) Determine a equação do plano π que é tangente ao gráfico de f e que, além disso, o plano π passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$.
   (c) Determine a equação da reta N que é normal ao plano π [definido em (b)] e que, além disso, a reta N passa pelo ponto $(1, 1, 2)$.

Solução.

(a) Temos $z_0 = f(x_0, y_0) = x_0 y_0$, pois P_0 está no gráfico de f. Temos também
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0.$$
Logo,
$$\pi_{P_0} : \quad y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - (z - x_0 y_0) = 0.$$

(b) Basta resolvermos o sistema
$$\begin{cases} y_0(1 - x_0) + x_0(1 - y_0) - (2 - x_0 y_0) = 0, \\ y_0(-1 - x_0) + x_0(1 - y_0) - (1 - x_0 y_0) = 0. \end{cases}$$
Isto é,
$$\begin{cases} x_0 + y_0 - x_0 y_0 = 2, \\ x_0 - y_0 - x_0 y_0 = 1. \end{cases}$$
Obtemos
$$y_0 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = 3, \quad z_0 = x_0 y_0 = \frac{3}{2} \quad \text{e portanto} \quad P_0 = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$
O plano π pedido é
$$\pi : \quad \frac{1}{2}(x - 3) + 3\left(y - \frac{1}{2}\right) - \left(z - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

(c) A reta pedida é:
$$N : \quad (x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \clubsuit$$

2. Suponha que a função $z = z(x, y)$, definida em uma bola aberta centrada no ponto $(1, 1)$ e de raio maior que zero, é diferenciável e satisfaz a equação

$$z(x, y)\ln(e + x^2 - y^2) + z(x, y)^4 = 18, \quad \text{com} \quad z(1, 1) = 2.$$

   (a) Compute as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ no ponto $(1, 1)$.

   (b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto

$$(1, 1, 2).$$

   (c) Ache a equação da reta normal ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto $(1, 1, 2)$.

Solução.

Notemos que $2\ln(e + 1^2 - 1^2) + 2^4 = 18$.

(a) As derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\ln(e + x^2 - y^2) \; + \; z(x, y)\frac{2x}{e+x^2-y^2} \; + \; 4z(x, y)^3\, \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\ln(e + x^2 - y^2) \; - \; z(x, y)\frac{2y}{e+x^2-y^2} \; + \; 4z(x, y)^3\, \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Donde, no ponto $(x, y, z(x, y)) = (1, 1, 2)$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) \; + \; \frac{4}{e} \; + \; 32\, \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 0 \\ \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)\ln(e) \; - \; \frac{4}{e} \; + \; 32\, \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) \; = \; -\frac{4}{33e} \\ \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)\ln(e) \; = \; \frac{4}{33e}. \end{cases}$$

(b) Seja π plano tangente procurado. Temos

$$\pi : \quad -\frac{4}{33e}(x - 1) + \frac{4}{33e}(y - 1) - (z - 2) = 0.$$

(c) A reta normal pedida é

$$N : (x, y, z) = (1, 1, 2) \; + \; \lambda\left(-\frac{4}{33e}, \frac{4}{33e}, -1\right), \; \lambda \in \mathbb{R} \clubsuit$$

3. Ache os pontos de máximo e de mínimo absolutos e os respectivos valores de máximo e mínimo absolutos da função

$$T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

no conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x \ \text{ e } \ 2y + x \leq 4\}$.

Solução. A região K está: no semi-plano (fechado) à direita $\{(x,y) : x \geq 0\}$, acima da bissetriz principal $\{(x,y) : x = y\}$ e abaixo da reta $\{(x,y) : 2y+x = 4\}$. Assim, K é a região triangular, limitada, fechada, convexa e compacta, cuja fronteira é o triângulo de vértices

$$(0,0), \qquad (0,2) \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

É claro que $T(x,y) \leq 4$ para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$ e que $T(x,y) < 4$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Então, como $T(0,0) = 4$ e $(0,0) \in K$, segue que

$$\begin{cases} (0,0) \text{ é ponto de máximo absoluto e estrito de } T \text{ restrita a } K \text{ e} \\ 4 \ \text{ é o valor máximo absoluto de } T \text{ restrita a } K. \end{cases}$$

Como T é contínua e K é compacto, pelo Teorema de Weierstrass a função T restrita a K assume um mínimo absoluto em K.

Os pontos de minimo e máximo locais de T restrita a K, se existirem, estão no interior de K e neste caso o gradiente se anula. Isto é,

$$\nabla T(x,y) = (-2x, -2y) = (0,0) \Longrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Mas, $(0,0)$ não pertence ao interior de K [pois, $(0,0)$ pertence à fronteira de K]. Assim, T restrita a K não possui pontos de minimo e máximo locais.

Logo, o ponto de mínimo absoluto de T restrita a K está na fronteira de K. Dividamos ∂K (a fronteira de K) em três segmentos:

$$\{(0,y) : 0 \leq y \leq 2\}, \quad \left\{(x,x) : 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\left(x, \frac{4-x}{2}\right) : \ 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right\}.$$

A seguir, identifiquemos os pontos de mínimo de

$$\begin{cases} T(0,y) = 4 - y^2, & 0 \leq y \leq 2, \\ T(x,x) = 4 - 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{4}{3}, \\ T\left(x, \frac{4-x}{2}\right) = 4 - x^2 - \frac{(4-x)^2}{4} = -\frac{5}{4}x^2 + 2x, & 0 \leq x \leq \frac{4}{3}. \end{cases}$$

No primeiro caso, o valor mínimo é claramente $0 = T(0,2) = T(0,-2)$.

No segundo caso, a derivada de $T(x,x)$ não se anula para $x \in [0, 4/3]$. Logo, basta analisarmos $x = 0$ e $x = 4/3$. O valor mínimo é então $\frac{4}{9} = T(4/3, 4/3)$.

No terceiro caso, a derivada de $T(x, (4-x)/2) = 2x - 5x^2/4$ se anula em $x = 4/5$ no intervalo $(0, 4/3)$. Comparando com os valores nas extremidades, temos

$$T\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad T(0,0) = 4 \ \text{ e } \ T\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9} < \frac{4}{5}.$$

Logo, o ponto de mínimo absoluto e o valor mínimo absoluto de T restrita a K são, respectivamente, $(4/3, 4/3)$ e $T(4/3, 4/3) = 4/9$ ♣

4. Determine os pontos de mínimo e de máximo (locais e absolutos) e respectivos valores de mínimo e de máximo (locais e absolutos) e os pontos de sela de

$$g(x,y) = xy(1-x^2-y^2), \quad \text{onde } 0 \le x \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le y \le 1.$$

Solução.

O domínio de $g(x,y)$ é o quadrado $Q = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$.

Como g é contínua e Q é compacto, pelo teorema de Weierstrass segue que g assume máximo e mínimo absolutos no quadrado Q.

Os pontos de máximo e mínimo locais de g, se existirem, pertencem ao interior do quadrado Q e em tais pontos o gradiente de g se anula. Isto é,

$$\begin{cases} 0 = g_x = y(1-x^2-y^2) - 2x^2y = y(1-3x^2-y^2) \\ 0 = g_y = x(1-x^2-y^2) - 2xy^2 = x(1-x^2-3y^2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (0,0), (0,1), (0,-1), \\ (1,0), (-1,0), \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

O único ponto crítico de $g(x,y)$ [restrita a Q] é $(1/2, 1/2)$ [os demais pontos não estão no interior do quadrado, pois alguns estão na fronteira de Q e outros estão fora de Q]. Analisamos tal ponto crítico pelo método do hessiano. Temos

$$g_{xx} = -6xy, \quad g_{xy} = 1 - 3x^2 - 3y^2 \quad \text{e} \quad g_{yy} = -6xy.$$

Seja $P = (1/2, 1/2)$. Logo,

$$\mathcal{H}g(P) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \det \mathcal{H}g(P) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} > 0 \ \text{ e } \ g_{xx}(P) < 0.$$

Logo, P é ponto de máximo local e $g(P) = 1/8$ é valor máximo local.

Analisemos g restrita em cada um dos quatro segmentos da fronteira ∂Q. Temos

$$\begin{cases} g(0,y) = 0, & \text{para } 0 \le y \le 1, \\ g(x,0) = 0, & \text{para } 0 \le x \le 1, \\ g(1,y) = -y^3, & \text{para } 0 \le y \le 1 \\ g(x,1) = -x^3, & \text{para } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

No primeiro segmento, g é nula.

No segundo segmento g é nula.

No terceiro segmento, o ponto de mínimo é $(1,1)$ e o de máximo é $(1,0)$.

No quarto segmento, o ponto de mínimo é $(1,1)$ e o de máximo é $(0,1)$.

Ainda, temos $g(1,1) = -1$, $g(1,0) = 0$ e $g(0,1) = 0$.

Conclusão. A função g não tem ponto de sela nem ponto de mínimo local. O ponto $(1/2, 1/2)$ é ponto de máximo local e também ponto de máximo absoluto e $g(1/2, 1/2) = 1/8$ é valor máximo local e absoluto. O ponto $(1,1)$ é ponto de mínimo absoluto e o valor mínimo absoluto é $g(1,1) = -1$♣

5. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela, a função

$$F(x,y,z) = \frac{x^5}{5} + y^4 + z^4 - \frac{x^3}{3} - 2y^2.$$

Solução.
A função F é de classe C^2 e podemos aplicar o teste do hessiano.
Temos $\nabla F = (x^4 - x^2, 4y^3 - 4y, 4z^3)$. Os pontos críticos de F satisfazem

$$x^2(x^2-1) = 0\,, 4y(y^2-1) = 0\,, z = 0.$$

Os pontos críticos são: $\begin{cases} P_1 = (0,0,0)\ , & P_2 = (0,-1,0)\ , & P_3 = (0,1,0), \\ P_4 = (1,0,0)\ , & P_5 = (1,-1,0)\ , & P_6 = (1,1,0), \\ P_7 = (-1,0,0)\ , & P_8 = (-1,-1,0)\ , & P_9 = (-1,1,0). \end{cases}$

Também temos,

$$F_{xx} = 2x(2x^2-1),\ F_{yy} = 4(3y^2-1),\ F_{zz} = 12z^2 \text{ e } F_{xy} = F_{xz} = F_{yz} = 0.$$

As matrizes hessianas de F em P_i, para $i = 1, \ldots, 9$ (e todas com $z = 0$), são:

$$\mathcal{H}(F)(P_i) = \begin{pmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz} = 0 \end{pmatrix}.$$

Os menores principais de ordem 2 de F em P_i, para $i = 1, \ldots, 9$, são:

$$\mathcal{H}_1(F)(P_i) = \begin{pmatrix} 2x(2x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{pmatrix}.$$

Temos $\det \mathcal{H}(F)(P_i) = 0$, em todo P_i, e o teste do hessiano (estudo dos sinais dos menores principais de ordens 1, 2 e 3) não é imediato. Vejamos outras características.

• Os sinais na diagonal da matriz hessiana $\mathcal{H}(F)$. Os pontos críticos em que a diagonal de $\mathcal{H}(F)$ troca de sinal são pontos de sela: no ponto P_4 temos $F_{xx} = 2$ e $F_{yy} = -4$; nos pontos P_8 e P_9 temos $F_{xx} = -2$ e $F_{yy} = 8$.

• P_1, P_2 e P_3 tem a forma $P_i = (0, y_i, 0)$ com $y_i = 0, -1$ ou 1, respectivamente. Vejamos que os três são pontos de sela. Fixemos a segunda coordenada y_i e a terceira coordenada 0 e variemos a primeira. Analisemos a função diferença

$$F(x, y_i, 0) - F(0, y_i, 0) = x^3\left(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}\right), \text{ onde } x \in (-\infty, +\infty).$$

Temos $(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3}) \approx -\frac{1}{3} < 0$ se $x \approx 0$ ao passo que x^3 é positivo à direita de zero e negativo à esquerda. Logo, o produto $x^3(\frac{x^2}{5} - \frac{1}{3})$ é positivo/negativo conforme x se aproxima de 0 pela direita/esquerda. Assim, $P_i = (0, y_i, 0)$ é de sela para $i = 1, 2, 3$.

• $P_7 = (-1, 0, 0)$ é ponto de sela pois [fixando a primeira e a segunda coordenadas e variando a terceira] a diferença $F(-1, 0, z) - F(-1, 0, 0) = z^4$ têm mínimo local estrito em $z = 0$, ao passo que [fixando a primeira e a terceira coordenadas e variando a segunda] a diferença

$$\Psi(y) = F(-1, y, 0) - F(-1, 0, 0) = y^4 - 2y^2 \text{ satisfaz } \psi'' = 12y^2 - 4 \text{ e } \psi''(0) < 0$$

e então têm máximo local estrito em $y = 0$.

Vide Verso

• $P_5 = (1, -1, 0)$ e $P_6 = (1, 1, 0)$ são de mínimo local pois cada uma das três funções de uma variável real,

$$\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}, \quad y^4 - 2y^2 \quad \text{e} \quad z^4$$

têm mínimo local em $x = 1$, $y = \pm 1$ e $z = 0$, respectivamente, e considerando-as como funções da variável tri-dimensional $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, as três têm mínimo local no ponto $(1, 1, 0)$ e no ponto $(1, -1, 0)$ e então a soma das três, que é a função F, têm então mínimo local no ponto $(1, 1, 0)$ e no ponto $(1, -1, 0)$.

Resposta: Pontos de mínimo local: P_5 e P_6. Pontos de sela: os demais $P_{i's}$ ♣