

**7ª Lista de MAT121 - Cálculo II - IOUSP**

**2º semestre de 2014**

*Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira*

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada em volta do ponto  $(x_0, y_0)$ .

(a)  $f(x, y) = e^{x+5y}$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,

(b)  $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

2. Sejam  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$  e  $P_1(x, y)$  o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $(1, 1)$ .

(a) Calcule um valor aproximado para  $f(1,001; 0,99)$ , utilizando  $P_1(x, y)$ .

(b) Mostre que se  $|x - 1| < 1$  e  $|y - 1| < 1$  então,

$$|f(x, y) - P_1(x, y)| < 7(x - 1)^2 + 6(y - 1)^2 .$$

(c) Avalie o erro que se comete na aproximação do item (a).

3. Seja  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ , com  $a, b, c, d, e, m$  constantes reais e seja  $(x_0, y_0)$  um ponto crítico de  $f$ . Prove que para todo  $(h, k)$  em  $\mathbb{R}^2$  temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2 .$$

4. Determine os pontos de máximo e mínimo local de  $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ .

5. Estude quanto a máximos e mínimos locais as funções

a)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$

b)  $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

c)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$ .

d)  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

6. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função  $f(x, y) = y^2 - x^2$  sobre  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

7. Determine o ponto do plano  $x + 2y - 3z = 4$  mais próximo da origem.

8. Determine  $(x, y)$ , com  $x^2 + 4y^2 \leq 1$  que maximiza a soma  $2x + y$ .

9. Determine os valores extremos, locais e absolutos, e os pontos de sela de

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2), \quad \text{onde } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1.$$

10. Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções:
- $F(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$
  - $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$
  - $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$
  - $F(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z.$
11. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.
- $f(x, y) = 3x - y$  sobre  $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq 3, x + y \leq 4\}$
  - $f(x, y) = 3x - y$  sobre  $K = \{(x, y) \in : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
  - $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$  sobre  $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ .
  - $f(x, y) = x + 5y$  em  $K = \{(x, y) : 5x + 6y \leq 30, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ .
  - $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$  em  $K = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ .
  - $f(x, y) = xy$ , sobre  $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$ .
12. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela a função:
- $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
  - $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy, x > 0 \text{ e } y > 0$
  - $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$
  - $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$
13. Determine e classifique os pontos estacionários de
- $f(x, y) = y^2 + (x + 1)^2y + (x + 1)^4$
  - $F(x, y, z) = x^4 + x^2y + y^2 + z^2 + xz + 1$
14. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:
- $f(x, y) = 3x + y \text{ e } x^2 + 2y^2 \leq 1$
  - $f(x, y) = x^2 - 2y^2 \text{ e } x^2 + y^2 - 2x = 0$
  - $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \text{ e } x + 2y = 3$
  - $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \text{ e } x^2 + 2y^2 = 1$
  - $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \text{ e } xy = 1, x > 0 \text{ e } y > 0.$
15. Determine o valor máximo de  $f(x, y) = x + 5y$  onde  $x$  e  $y$  estão sujeitos às condições
- $$5x + 6y \leq 30, 3x + 2y \leq 12, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$
16. Seja  $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$ .
- Represente, com um desenho, a região do plano em que  $f$  é positiva.
  - Determine os pontos críticos de  $f$  e classifique-os.
  - $f$  tem um máximo ou um mínimo em todo plano? Justifique.
17. Seja  $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ .
- Represente, com um desenho, a região em que  $f \geq 0$ .
  - Mostre que  $f$  restrita a qualquer reta  $y = mx$  tem um mínimo em  $(0, 0)$ .
  - Mostre que  $(0, 0)$  não é um ponto de mínimo relativo de  $f$