$6^{\underline{a}}$ Lista de MAT121 - Cálculo II - IOUSP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

01. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$ Verifique e/ou compute:

   (a) f é contínua em $(0,0)$? E nos demais pontos ?
   (b) Compute f sobre as retas passando pela origem.
   (c) Compute f sobre a parábola $\{(y^2,y) : y \in \mathbb{R}\}$.
   (d) Compute as derivadas parciais de f na origem.
   (e) As derivadas parciais de f são contínuas na origem ? E nos demais pontos ?
   (f) f é diferenciável na origem ? E nos demais pontos ?
   (g) Esboce as curvas de nível de f.
   (h) Determine a imagem de f.
   (i) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f.

02. Dê exemplos de funções f em duas variáveis reais a valores reais e de um ponto P_0 tais que (prove suas as afirmações)

   (a) f é contínua em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
   (b) f admite derivadas parciais em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
   (c) f admite todas as derivadas direcionais em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
   (d) f é diferenciável em P_0 mas as derivadas parciais não são contínuas em P_0.
   (e) f admite derivadas parciais em $P_0 = (x_0, y_0)$ mas o plano

$$\pi:\ f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0\,,\quad z_0 = f(P_0) = f(x_0,y_0).$$

   não é tangente ao gráfico de f.
   (f) Existe $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$, $\forall\, \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{v}$, $\forall \vec{v}$ unitário.

03. Consideremos a função,

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}\,, x^2+y^2 < 1 \\ 0\,,\ \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico de f.
   (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
   (c) Determine o conjunto dos pontos em que f é diferenciável.

1. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente.

   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1,1)$ b) $f(x,y) = \ln ||(x,y)||$ em $(1,-1)$.

   c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Seja $f(x,y) = arc\text{tg}\left(\frac{\text{x}}{\text{y}}\right)$.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3,3)$ com $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f.

3. Admita que $T(x,y) = 16 - 2x^2 - y^2$ é uma distribuição de temperatura no plano x, y. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1,2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

4. Sejam $f(x,y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\sin t, \sin^2 t)$.

   (a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

   (b) Desenha a imagem de γ.

   (c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \vec{\nabla} f(\gamma(t)) = 0$.

5. Calcule a derivada direcional da função dada no ponto e direção $\vec{w}$ indicados.
   (a) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1,1,1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1,2,-1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

6. a) Dada $z = f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ o plano tangente em (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, tem equação

$$\pi : \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0)\,(y - y_0) - (z - z_0) = 0\ .$$

   b) Definindo $F(x,y,z) = z - f(x,y)$, o gráfico de f é a superfície de nível 0 de F. Logo, o gradiente de F é ortogonal ao gráfico de f. Compute o gradiente de F.

7. A função $z = z(x,y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ .$$

   Mostre que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0).

8. a) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $\begin{cases} z = z(x,y) = e^x \cos y \\ x = x(t,s) = ts \\ y = y(t,s) = \sqrt{t^2 + s^2} \end{cases}$.

   b) Verifique, para o ítem a), a fórmula abaixo ($3^{\underline{a}}$ Regra da Cadeia).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}_{1\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

9. Seja $z = f(x,y)$, onde $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}$.

   a) Determine $\frac{\partial z}{\partial r}$ e $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

   b) Mostre que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

   c) Utilizando a $3^{\underline{a}}$ Regra da Cadeia escreva, como na questão 8, a fórmula matricial relacionando as derivadas.

10. Compute a diferencial das funções abaixo.

$$(a)\ z = x^3y^2 \qquad (b)\ z = xarctg(x+2y) \qquad (c)\ z = \sin xy$$

$$(d)\ u = e^{s^2-t^2} \qquad (e)\ T = \log(1+p^2+v^2) \qquad (f)\ x = \arcsin uv$$

11. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Compute uma valor aproximado:

    (a) para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

    (b) para z, correspondente a $x = 1,02$ e $y = 1,002$.

12. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. Compute:

    (a) o diferencial de z no ponto $(1,8)$.

    (b) um valor aproximado para z correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

    (c) um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

13. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

    $f(x,y) = e^{x+5y}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

14. Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x_0, y_0) = (0,0)$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1,1)$.

    (a) Utilizando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(x,y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

    (b) Avalie o erro que se comete com a aproximação do item (a).

15. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

    (a) $f(x,y) = x \sin y$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

    (b) $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$.