$2^{\underline{a}}$ Prova de MAT0111 - Cálculo I - IAG
22/06/09

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________GABARITO ________________________
$N^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco**

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Calcule as integrais definidas abaixo:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$

b) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}^3\, x\ dx$

Resolução:

(a) Substituindo $t = x+1$, $dt = dx$ temos

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int_1^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \int_1^4 (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})\, dt = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= (\frac{16}{3} - 4) - (\frac{2}{3} - 2) = \frac{8}{3} \quad .$$

(b)

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}^3\, x\, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}x(1-\cos^2 x)\, dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}x\, dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \text{sen}x \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} \qquad \blacksquare$$

2. Calcule a área de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } \dfrac{1}{x^2} \leq y \leq 5 - 4x^2\}$.

Resolução:

A párabola tem concavidade para baixo, vértice em $(0,5)$, raízes $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ e intersecta, no primeiro quadrante, o gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ em dois pontos: resolvendo $5-4x^2 = \frac{1}{x^2}$ ou $4x^4-5x^2+1 = 0$ encontramos, por fatoração, $4(x^2-1)(x^2-\frac{1}{4}) = 0$; logo, como supomos $x > 0$, temos

$$x = 1 \quad \text{ou } x = \frac{1}{2} .$$

No intervalo $[\frac{1}{2}\,, 1]$ a parábola está acima do gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ e assim, a área é:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (5 - 4x^2 - \frac{1}{x^2})dx = \left(5x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = (5 - \frac{4}{3} + 1) - (\frac{5}{2} - \frac{4}{24} + 2) = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

3. Calcule:

a) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x+2}\ dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-2}}\ dx$

Resolução:

(a) Temos,

$$\int \sqrt{-x^2+2x+2}\ dx = \int \sqrt{-(x-1)^2+3}\,dx = \int \sqrt{3\Big[1-(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2\Big]}\ dx\ .$$

Então, substituindo $\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \sin\theta$ temos $dx = \sqrt{3}\cos\theta\, d\theta$ e

$$\int \sqrt{-x^2+2x+2}\ dx = \sqrt{3}\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\sqrt{3}\cos\theta\, d\theta = 3\int \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{3}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{3}{2}(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) + c = \frac{3}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + c =$$

$$= \frac{3}{2}\Big[\operatorname{arcsen}(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) + (\frac{x-1}{\sqrt{3}})\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{3}}\Big] + c\ \ .$$

(b) Temos,

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{[(x-1)+1]^2+1}{\sqrt{x-1}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+2}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\ dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \Big[(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + 2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\Big]\ dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 4(x-1)^{\frac{1}{2}}\,\Big] + c \quad \blacksquare$$

4. Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx$.

Resolução:

É fácil ver que $x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)=(x-1)[(x+1)^2+2]$ e

$$\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx = \int \frac{(x^3+x^2+x-3)+(3x^2+5x+4)}{x^3+x^2+x-3}\,dx =$$

$$= \int \left[1+\frac{3x^2+5x+4}{(x-1)(x^2+2x+3)}\right]dx\ .$$

Como x^2+2x+3 não têm raízes reais é válida a decomposição em frações parciais,

$$\frac{3x^2+5x+4}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}\ ,\ A,B,C\in\mathbb{R}\ ;$$

multiplicando tal equação por $x-1$ e então computando em $x=1$ obtemos $A=12/6=2$; avaliando então em $x=0$ temos $-\frac{4}{3}=-2+\frac{C}{3}$ e assim, $C=2$; por fim, calculando em $x=-1$ obtemos $-\frac{2}{4}=-1+\frac{-B+2}{2}$ e assim, $B=1$. Logo,

$$\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx = \int \left[1\ +\ \frac{2}{x-1}\ +\ \frac{x+2}{2+(x+1)^2}\right]dx\ .$$

Ainda,

$$\int \frac{x+2}{2+(x+1)^2}\,dx = \int \frac{x+1}{2+(x+1)^2}\,dx\ +\ \int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{2+(x+1)^2}\,dx\ +\ \int \frac{1}{2[1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2]}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|2+(x+1)^2|\ +\ \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|2+(x+1)^2|\ +\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})\ +c\ .$$

Portanto,

$$\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}\,dx = x+2\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(x^2+2x+3)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+c\ \blacksquare$$

5. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do conjunto $A = \{(x,y) \in I\!\!R^2 \mid 0 \le x \le 2\ ,\ y \ge \sqrt{x-1}\ \text{ e }\ 0 \le y \le x^2\}$.

Resolução: O volume procurado é a diferença entre os gerados pelas rotações de $\{(x,y) : 0 \le x \le 2\,, 0 \le y \le x^2$ e de $\{(x,y) :\le y \ge \sqrt{x-1}\}$ em torno de Oy:

$$\int_0^2 2\pi x x^2\,dx \;-\; \int_1^2 2\pi x\sqrt{x-1}\,dx = 2\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 2\pi\int_0^1 (1+t)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= 8\pi - \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}})\,dt = 8\pi - 2\pi(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}})\Big|_0^1 = 8\pi - 2\pi(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}) = \frac{88\pi}{15} \quad \blacksquare$$