MAT 111 - CÁLCULO I - IAG
1º SEMESTRE de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

INTEGRAL

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0, T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante t e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < ... < t_i < ... < t_n = T$, a variação no período $[0, T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]} \ .$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ é a vazão num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$(2) \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1} - t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}) \ .$$

Combinando (1) e (2) obtemos,

$$(3) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i}) \Delta t_i \ .$$

Definimos então **a integral de** Q' [que notamos $\int_0^T Q'(t)dt$] como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i) \Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] \ ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se Q' é continua, temos o **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo**,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \qquad \blacksquare$$

Interpretação: a variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado. Retornem a ela ao estudarem no Cálculo III o Teorema da Divergência, ou de Gauss.