

CÔNICAS - MAT 111 - CÁLCULO I -

Bacharelado IAG - Diurno

1º SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

No plano euclidiano consideremos F_1 e F_2 dois pontos (**focos**) distintos.

ELIPSE

- (1) Se $2a$ é um comprimento fixo e maior que a distância entre F_1 e F_2 , o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$ é uma **elipse**.

A **equação padrão da elipse** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Solução: Seja s a reta por F_1 e F_2 (desenhe) e C o ponto médio entre F_1 e F_2 .

Trace por C a reta t , perpendicular a s e mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a F_1 e F_2 igual a $2a$ (distam a de F_1 e F_2), simétricos em relação à reta s , contendo F_1 e F_2 .

Por semelhança de triângulos é claro que se P é um ponto da elipse, P' , o seu simétrico em relação a s , também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a s .

Para o mesmo P , o ponto P'' , simétrico de P em relação a t (perpend. a $\overline{F_1F_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a F_1 e F_2 é d . Verifique.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e um centro e para desenhá-la basta fazê-lo em um quadrante e então refletir em relação às retas t e s .

Escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy tal que Ox , o eixo x , corresponda à reta t , Oy à reta s e adotemos $O = C$, o ponto médio entre os focos, como a origem.

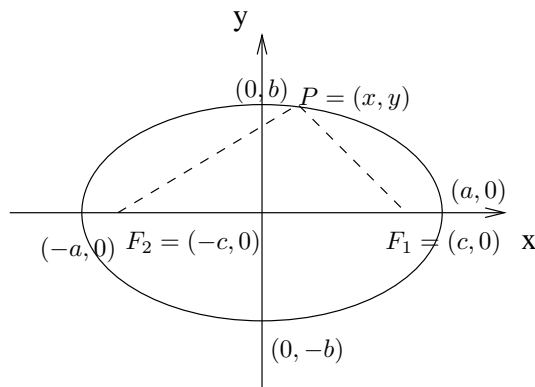


Figura 1: Focos e Vértices - Elipse

Nesse sistema: $F_1 = (\pm c, 0)$, $F_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$.

O segmento $\overline{B_1B_2}$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ pertencentes à elipse, com $b > 0$ (v. figura), é o **semi-eixo menor** da elipse. É fácil ver que $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_2F_2}| = a$ e

$$(1) \quad a^2 = b^2 + c^2 .$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a .$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF'}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois $|\overline{PF'}| = 2a - |\overline{PF}|$. O quadrado dessas equações é

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \mp 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando, $(\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

HIPÉRBOLE

- (2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, $a > 0$, é uma **hipérbole**.

A **equação padrão da hipérbole** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Obs 1:

Se P , no plano, não é um foco, pela desigualdade triangular temos $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$. Logo, $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$ e, mutatis mutandis, $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$. Assim,

$$| |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| | \leq |\overline{F_1F_2}|, \quad \forall P.$$

A **condição de existência** da hipérbole é então: $2a < |\overline{F_1F_2}|$.

Obs 2 Para P na hipérbole temos $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$ ou $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$. Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \quad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a.$$

O **ramo direito (esquerdo) da hipérbole** é obtido atribuindo o sinal $+$ ($-$) em (H).

Solução Seja Oxy um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo x contendo $\overline{F_1F_2}$ e por eixo y a mediatriz deste segmento. Vide figura abaixo.

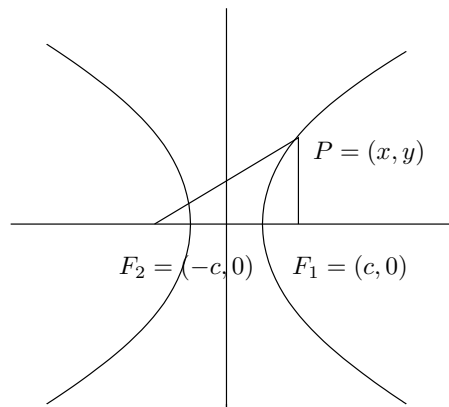


Figura 2: Hipérbole-Focos

Supondo $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ ($0 < a < c$) temos : $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$.

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = [\pm 2a + \overline{PF_1}]^2 = 4a^2 \pm 4a\overline{PF_1} + (x-c)^2 + y^2 ,$$

donde

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\overline{PF_1}$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x + a\right) ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$. Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da curva e o negativo ao esquerdo. Os quadrados destas equações fornecem:

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2 ;$$

que reduzimos a,

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2 ,$$

ou,

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 .$$

Pela condição de existência, $0 < a < c$, temos $c^2 - a^2 > 0$ e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 ,$$

e substituindo esta em (4):

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

PARÁBOLA

- (3) Fixados no plano euclidiano, um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), $F \notin d$, o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias a F e a d são iguais é uma **parábola**.

A **equação padrão da parábola** é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 = 4py \quad p > 0 .$$

Obs A parábola é simétrica em relação à reta por F perpendicular a d , dita **eixo de simetria da parábola**. O ponto médio entre F e a projeção de F sobre d (equidistante entre F e d) é o ponto da parábola mais próximo de d e dito **vértice da parábola**.

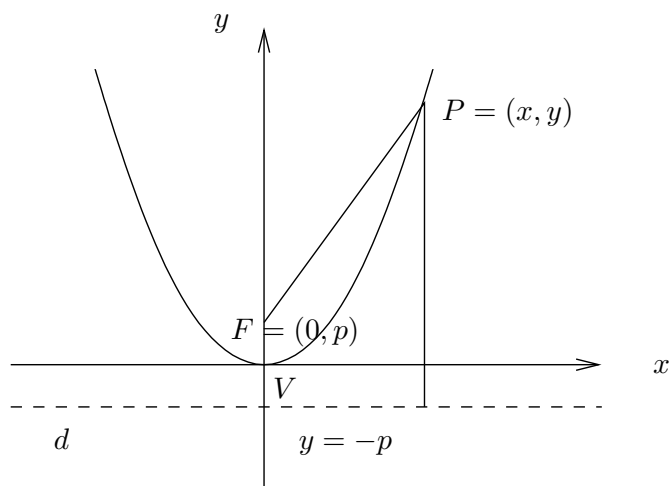


Figura 3: Parábola

Resolução

Seja Oxy um sistema cartesiano de coordenadas tal que: (i) o eixo y corresponde ao eixo de simetria (ii) a origem ao vértice, (iii) o eixo x à reta pela origem, paralela a d e, (iv) orientemos o eixo y tal que $F = (0, p)$, $p > 0$. Assim, d tem por equação $y = -p$.

Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

Obs A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

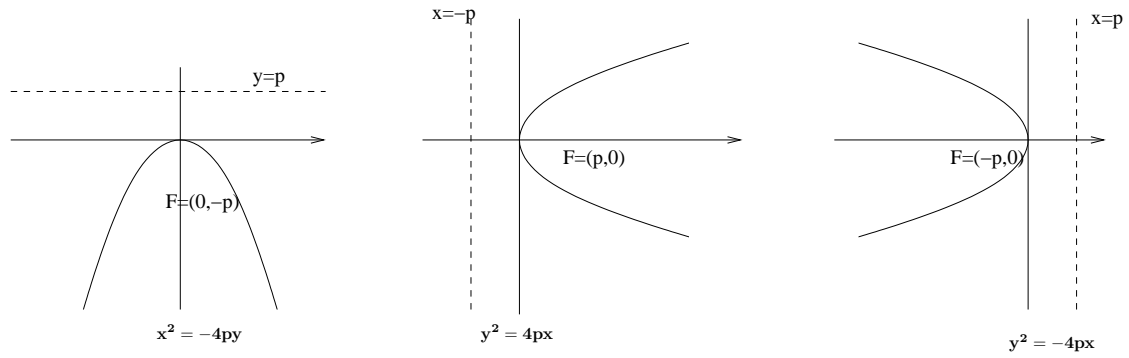


Figura 4: posições e equações- parábolas