MUDANÇA DE BASE

MAT105 - Geometria Analítica - Instituto de Geociências

Primeiro semestre de 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Como por vezes é útil mudarmos de coordenadas para melhor resolvermos um problema, vejamos um método eficaz para efetuarmos uma mudança de coordenadas.

Suponhamos dados em V^3 um vetor $\overrightarrow{v}$ e duas bases ordenadas

$$E = (\,\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3}\,) \qquad \text{e} \qquad F = (\,\overrightarrow{f_1}\,,\overrightarrow{f_2}\,,\overrightarrow{f_3}\,)\,.$$

Mostremos como conhecendo as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base (ordenada) E podemos obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base (ordenada) F.

Suponhamos conhecidas as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ em relação à base F e que elas são, ordenadamente, $y_1\,,y_2$ e y_3. Escrevemos então,

$$(1) \qquad \overrightarrow{v} = y_1\overrightarrow{f_1} + y_2\overrightarrow{f_2} + y_3\overrightarrow{f_3} = (y_1\,,y_2\,,y_3)_F\,.$$

Determinemos $x_1\,,x_2$ e x_3, ordenadamente, as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ em relação à base E. Isto é,

$$(2) \qquad \overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3} = (x_1\,,x_2\,,x_3)_E\,.$$

Para tal, escrevamos os vetores de F em termos da base E:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}\,. \end{cases}$$

Substituindo $\overrightarrow{f_1}\,,\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$, descritos acima, na identidade (1) encontramos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= y_1(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}) + y_2(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}) \\ &\quad + y_3(a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}) \\ &= (y_1a_{11} + y_2a_{12} + y_3a_{13})\overrightarrow{e_1} + (y_1a_{21} + y_2a_{22} + y_3a_{23})\overrightarrow{e_2} \\ &\quad + (y_1a_{31} + y_2a_{32} + y_3a_{33})\overrightarrow{e_3}. \end{aligned}$$

Como os coeficientes de $\vec{v}$ em relação à base E são únicos, por (2) temos

$$
(3) \qquad \begin{cases} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \ . \end{cases}
$$

Adotando então a **notação matricial** introduzimos,

Notação. Identificamos a sequência (ordenada), $x_1\, x_2\,, x_3$, das coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em V^3, em relação à uma base E, com matrizes-colunas em $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$:

$$
(x_1\,, x_2\,, x_3)_E \ \equiv \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_E \ = \ [\,\vec{v}\,]_E
$$

sendo que o sub-índice E indica a base e pode ser omitido se esta é subentendida.

Com tal notação, passamos a escrever o sistema (3), que relaciona as coordenadas de $\vec{v}$ em relação às bases E e F, através da equação matricial

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_F ,
$$

Definição. *A matriz de mudança da base F para a base E é a matriz*

$$
[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} .
$$

O símbolo I entre colchetes em $[\,I\,]_E^F$ refere-se à aplicação identidade pelos motivos que expomos a seguir.

- Se $E = F$, a matriz de mudança de base da base E para a base E é a matriz identidade.

- Em cursos de Álgebra Linear (e às vezes em cursos de Cálculo) é mostrado que a matriz $[\,I\,]_E^F$ é a matriz associada à aplicação identidade $I : V^3 \longrightarrow V^3$ (a qual é um exemplo de transformação linear) se no **domínio** adotamos o sistema de coordenadas proporcionado pela base F e no **contradomínio** o sistema de coordenadas dado pela base E.

Fórmula. Temos então, devido às notações e comentários acima, as identidades

$$[\overrightarrow{v}\,]_E = [\,I(\,\overrightarrow{v}\,)\,]_E = [\,I\,]_E^F\ [\overrightarrow{v}\,]_F\,.$$

ou, simplesmente,

$$[\overrightarrow{v}\,]_E = [\,I\,]_E^F\ [\overrightarrow{v}\,]_F\,.$$

Observação. A fórmula acima fornece um mnemônico. Basta cancelar F (em diagonal) no lado direito da equação acima para obtermos as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base E.

Desta forma, com tal notação, observemos que as entradas nas primeira, segunda e terceira colunas da matriz de mudança da base F para a base E são, respectivamente, as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$.

Esquematicamente, e abusando da notação, temos

$$[\,I\,]_E^F \;=\; \left[\begin{array}{ccc} \left[\,\overrightarrow{f_1}\,\right]_E & \left[\,\overrightarrow{f_2}\,\right]_E & \left[\,\overrightarrow{f_3}\,\right]_E \end{array}\right].$$

Notemos também que

$$\left[\overrightarrow{f_1}\right]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\overrightarrow{f_2}\right]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \left[\overrightarrow{f_3}\right]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e que

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e analogamente para o vetor terceira coluna da matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$.

Proposição 1. *Se* $M = [\,I\,]_E^F$ *então* $\det(M) \neq 0$.

Prova.

Mantendo a notação acima, temos que se

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \;=\; 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \;=0 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \;=\; 0, \end{cases}$$

então pelo sistema (3), vide página 2, temos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ e portanto

$$[\overrightarrow{v}]_E \equiv (0,0,0)_E.$$

Logo, obtemos $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e consequentemente

$$(y_1, y_2, y_3) = [\overrightarrow{v}]_F = (0,0,0)_F \clubsuit$$

Proposição 2. *Sejam* $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ *e* $G = (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3})$ *três bases. Consideremos* $[I]_E^F$*, a matriz de mudança da base* F *para a base* E*,* $[I]_F^G$*, a matriz de mudança da base* G *para a base* F *e* $[I]_E^G$*, a matriz de mudança da base* G *para a base* E*. Então temos*

$$[I]_E^G = [I]_E^F \, [I]_F^G.$$

Prova.

Consideremos $\overrightarrow{g_1} = (1,0,0)_G$. Aplicando a Fórmula 2 duas vezes obtemos,

$$[I]_E^F \cdot [I]_F^G \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [I]_E^F \cdot [I]_F^G \cdot [\overrightarrow{g_1}]_G = [I]_E^F \cdot [\overrightarrow{g_1}]_F = [\overrightarrow{g_1}]_E .$$

A expressão mais à esquerda na identidade acima é a primeira coluna da matriz produto $[I]_E^F \; [I]_F^G$ e a expressão mais à direita é a primeira coluna da matriz $[I]_E^G$. Então, considerando analogamente os vetores $\overrightarrow{g_2}$ e $\overrightarrow{g_3}$ concluímos que estas duas matrizes são iguais$\clubsuit$

Corolário 3. *Dadas duas bases* E *e* F *de* V^3 *temos,*

$$\left([I]_E^F\right)^{-1} = [I]_F^E.$$

Prova.

Supondo $G = E$ na Proposição 4 temos

$$[I]_E^F [I]_F^E = [I]_E^E = I,$$

com I a matriz identidade. Analogamente segue

$$[I]_F^E [I]_E^F = [I]_F^F = I.$$

Logo, as matrizes $[I]_E^F$ e $[I]_F^E$ são inversas uma da outra $\clubsuit$

ROTAÇÕES EM $\mathbb{R}^2$

Na figura abaixo esboçamos a mudança de coordenadas no plano cartesiano efetuada ao girarmos os eixos tradicionais Ox e Oy no sentido anti-horário de um ângulo θ rad., com $0 < \theta < 2\pi$.

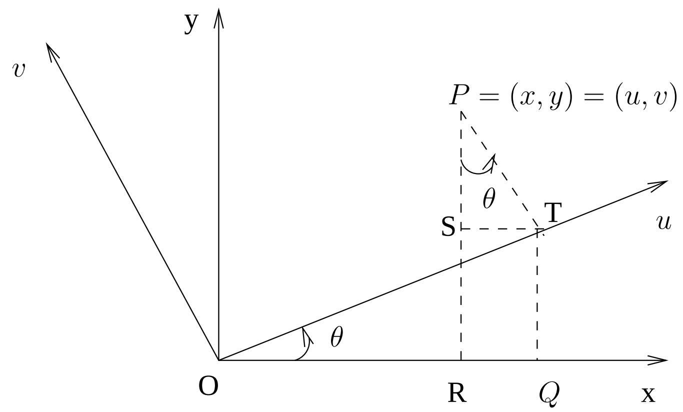

Figura 1: Rotação de Eixos

Não é difícil ver que dado um ponto P a relação entre as coordenadas (x, y) no sistema de coordenadas Oxy e suas novas coordenadas (u, v) no novo sistema de coordenadas Ouv é dada pelo sistema (com as equações de rotações de eixos)

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \ . \end{cases}$$

Em notação matricial escrevemos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

Também é usual escrevermos

$$(x\,, y) \ = \ (u\cos\theta - v\sin\theta\,, u\sin\theta + v\cos\theta).$$

Consideremos a base canônica de $\mathbb{R}^2$, definida por

$$C = \{\ \overrightarrow{e_1} = \langle 1, 0\rangle\ ,\ \overrightarrow{e_2} = \langle 0, 1\rangle\ \},$$

e também a base $B = \{\overrightarrow{f_1} = \langle\cos\theta\,, \sin\theta\rangle\ , \overrightarrow{f_2} = \langle -\sin\theta\,, \cos\theta\rangle\}$. Então temos

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \ = \ [\,I\,]_C^B\,.$$

INTERPRETAÇÕES PARA UM PRODUTO MATRICIAL

Consideremos o produto matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Chamemos as três matrizes acima de X, M e Y, segundo a ordem de surgimento.

Por definição de produto de matrizes encontramos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que

- x_1 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da primeira linha da matriz M,pelas três entradas da matriz coluna Y e então somando os resultados.
- x_2 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da segunda linha de M pelas três entradas da matriz coluna Y e então somando os resultados.
- x_3 é obtido multiplicando ordenadamente as três entradas da terceira linha de M pelas três entradas de Y e então somando os resultados.

Primeira Interpretação. Dizemos que x_1, x_2 e x_3 são, respectivamente, os " produtos escalares" da primeira linha , segunda linha e terceira linha da matriz quadrada M pela matriz-coluna Y.

Por outra perspectiva, também é fácil ver que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Segunda Interpretação (uma Proposição). O vetor-coluna X é a combinação linear dos três vetores-coluna da matriz M, naturalmente ordenados, cujos coeficientes são dados pelas entradas, usualmente ordenadas ("de cima para baixo"), do vetor-coluna Y.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considerando as bases $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ e $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$, ache a matriz de mudança da base F para E sabendo que

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\,. \end{cases}$$

Solução.

A matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$, da base F para a base E, é tal que suas colunas, primeira, segunda e terceira, correspondem às coordenadas de $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$ em relação à base E, respectivamente. Logo,

$$[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \clubsuit$$

2. Sendo E e F como no Exercício Resolvido 1 acima, e sendo

$$\overrightarrow{v} = (1, -1, 3)_F = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} + 3\overrightarrow{f_3}\,,$$

ache as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ em relação à base E.

Solução.

Temos,

$$[\,\overrightarrow{v}\,]_E = [\,I\,]_E^F\,[\,\overrightarrow{v}\,]_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \clubsuit$$

Observação. No Exercício 2 acima notemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

em concordância com a Segunda Interpretação, à página 6.

3. A matriz de mudança da base $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ para a base $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ é

$$[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Exprima os elementos de F em termos da base E.

Solução.

Repetindo a argumentação no Exercício Resolvido 1, temos que a matriz de mudança $[\,I\,]_E^F$, da base F para a base E, é tal que suas colunas, primeira, segunda e terceira, correspondem às coordenadas de $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$ em relação à base E, respectivamente. Donde segue,

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} \clubsuit \end{cases}$$

4. Ache a matriz de mudança da base E para a base F no caso do Exercício Resolvido 1. Exprima os vetores $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$ segundo a base F.

Solução (a mais simples neste particular exercício simples).

É óbvio que temos

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2} .$$

É muito fácil ver que,

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} .$$

Combinando as duas equações acima segue

$$\overrightarrow{e_1} \;=\; \overrightarrow{f_1} \;-\; \overrightarrow{f_2} \;+\; \overrightarrow{f_3}\ .$$

Por fim, da primeira identidade acima obtida $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2}$ e da identidade dada

$$\overrightarrow{f_3} \;=\; \overrightarrow{e_2} \;+\; \overrightarrow{e_3}$$

obtemos

$$\overrightarrow{e_2} \;= -\overrightarrow{f_2} \;+\; \overrightarrow{f_3} \quad .$$

Portanto, a matriz de mudança da base E para a base F é

$$[\,I\,]_F^E \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \clubsuit$$

5. Sejam $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ e $G = (\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3})$ três bases tais que

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} \;+\; 2\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_1} \;-\; \overrightarrow{f_3} \\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2} \;+\; \overrightarrow{f_3} \end{cases} \qquad\qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{e_1} \;-\; 2\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{e_1} \;+\; \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{e_2} \;-\; \overrightarrow{e_3}\ . \end{cases}$$

Determine as matrizes de mudança de

(i) E para F (ii) G para E (iii) G para F

(iv) F para E (v) E para G (vi) F para G .

Solução.

(i) É claro que

$$[\,I\,]_F^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) É claro que

$$[\,I\,]_E^G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(iii) Pela Proposição 2 e pelos ítens (i) e (ii) temos,

$$\begin{aligned}[\,I\,]_F^G &= [\,I\,]_F^E\ [\,I\,]_E^G \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iv) Pelo Corolário 3 (vide página 4) segue

$$[\,I\,]_E^F \ = \ \left([\,I\,]_F^E \right)^{-1}.$$

Computemos a matriz

$$\left([\,I\,]_F^E \right)^{-1}.$$

Escrevendo a matriz $[\,I\,]_F^E$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

e realizando sucessivas **operações elementares** (vide abaixo a definição) na matriz à esquerda até obtermos a matriz identidade, executamos estas mesmas operações, e na mesma ordem, sobre a matriz identidade à direita.

Ao obtermos, à esquerda, a matriz identidade de tamanho 3×3, obteremos à direita a inversa da matriz $[\,I\,]_F^E$.

Operações elementares Sobre Matrizes

Operações elementares sobre as linhas (colunas) da matriz A.

- Troca de duas linhas (colunas).
- Multiplicação de uma linha (coluna) por uma constante não nula.
- Adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna).
- Adição a uma linha (coluna) de outra linha (coluna) já multiplicada por uma constante.

Então, como primeiro passo, na matriz à esquerda, multipliquemos a primeira linha por -2 e somemos à segunda linha, e procedamos analogamente com a matriz à direita. Obtemos,

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como segundo passo, multipliquemos as terceiras linhas por -1 e então somemo-las às segundas linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como terceiro passo e quarto passos, somemos as segundas linhas às primeiras linhas e multipliquemos as segundas linhas por -1 e então somemo-las às terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right|.$$

Como quinto passo, multipliquemos as segundas linhas por -1:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right|.$$

Consequentemente temos

$$[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(v) Pelo Corolário (vide página 4) temos

$$[\,I\,]_G^E \;=\; \left([\,I\,]_E^G\right)^{-1}\;.$$

Computemos $\left([\,I\,]_E^G\right)^{-1}$.

Escrevamos a matriz $[\,I\,]_E^G$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Então, como primeiro passo, na matriz à esquerda, multipliquemos a primeira linha por 2 e somemos à segunda linha, e procedamos analogamente com a matriz à direita. Obtemos

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como segundo passo, somemos as terceiras linhas às segundas linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como terceiro passo, dividamos as segundas linhas por 3:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Como quarto e quinto passo, multipliquemos as segundas linhas por -1 e somemo-las às primeiras e terceiras linhas das respectivas matrizes:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right|.$$

Como sexto e último passo, multiplicamos as terceiras linhas por -1:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right| .$$

Consequentemente temos,

$$[\,I\,]_G^E = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} .$$

(vi) Pelo Corolário, temos

$$[\,I\,]_G^F = \Big([\,I\,]_F^G \Big)^{-1} .$$

Computemos $\Big([\,I\,]_F^G \Big)^{-1}$.

Escrevamos a matriz $[\,I\,]_F^G$ e a matriz identidade lado a lado,

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| ,$$

(Primeiro e segundo passos.) Multipliquemos as primeiras linhas por 2 e as somemos às segundas e terceiras linhas das respectivas matrizes:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right| .$$

(Terceiro passo.) Troquemos as segundas linhas com as terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right| .$$

(Quarto e quinto passos.) Multipliquemos as primeiras linhas por -1 e as segundas por $\frac{1}{3}$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right| .$$

(Sexto e sétimo passos.) Adicionemos as segundas linhas às primeiras linhas e, multiplicando as segundas linhas por -5 adicionemo-as então às terceiras linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right|.$$

(Oitavo passo.) Adicionemos as terceiras linhas às primeiras linhas:

$$\left|\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right|.$$

Consequentemente temos,

$$[\,I\,]_G^F = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Sejam $E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ e $F = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$ bases tais que

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}. \end{cases}$$

Com $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, ache as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ em relação à base F.

Solução.

Necessitamos da matriz $[\,I\,]_F^E$, sendo que é facilmente identificável a matriz

$$[\,I\,]_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Procedendo analogamente ao Exercício Resolvido 5 determinamos

$$[\,I\,]_F^E = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a resposta ao exercício é

$$[\,\overrightarrow{u}\,]_F \;=\; [\,I\,]_F^E\;[\,\overrightarrow{u}\,]_E \;=\; \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix} \clubsuit$$