GEOMETRIA ANALÍTICA - MAT 105 - Instituto de Geociências - USP

Primeiro semestre de 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

DÚVIDAS

(5) Capítulo 16 - POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS - 4 - Miscelânea, p. 192 (segunda edição do livro texto).

Obtenha uma equação vetorial da reta t, paralela aos planos α e β, e concorrente com as retas r e s, sendo

$$r: \ x - 2y = z - x = y + 1 \qquad s: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha: \ x + 2y + z - 1 = 0 \qquad \beta: \ x + 4y + 2z = 0.$$

Solução.

Sejam R e S pontos genéricos das retas r e s, respectivamente.

Para a reta r, utilizemos o parâmetro $y = \lambda$. Então (cheque),

$$R = (3\lambda + 1, \lambda, 4\lambda + 2).$$

Para a reta s, utilizemos o parâmetro $y = \mu$. Então (cheque),

$$S = (1, \mu, 2\mu - 2).$$

Impondo que R e S pertençam à reta t (procurada), encontramos

$$\overrightarrow{SR} // \alpha \quad \text{e} \quad \overrightarrow{SR} // \beta.$$

Sejam

$$\overrightarrow{n_\alpha} = (1, 2, 1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{n_\beta}$$

os vetores normais aos planos α e β, respectivamente.

Então, temos

$$\overrightarrow{SR} \quad \text{é paralelo a} \quad \overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (0, -1, 2).$$

Donde segue

$$(3\lambda, \lambda - \mu, 4\lambda - 2\mu + 4) \ // \ (0, -1, 2).$$

Logo,

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \mu = 1.$$

Encontramos então os pontos

$$R = (1, 0, 2) \quad \text{e} \quad S = (1, 1, 0).$$

Uma equação vetorial para a reta t é então

$$\boxed{t: \ X = (1, 1, 0) + \nu(0, -1, 2).}$$

Existem infinitas apresentações para a equação vetorial de t ♣

Vide próxima página.

(4) Capítulo 17 - PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE - 1 - Reta e reta, p. 200 (segunda edição do livro texto).

Dê uma equação vetorial da reta paralela ao plano π, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, e que intercepta a reta s, sendo

$$\pi:\ 2x-y+3z-1=0,\quad A=(1,0,1),\ B=(0,1,2),\quad s: X=(4,5,0)+\lambda(3,6,1).$$

Solução.

Seja r a reta procurada. Seja $\vec{v_r}$ um seu vetor diretor.

Seja C um ponto genérico da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Seja S um ponto genérico da reta s. Temos

$$C=(1,0,1)+\mu(-1,1,1)=(1-\mu,\mu,1+\mu)\quad \text{e}\quad S=(4+3\lambda,5+6\lambda,\lambda).$$

Impondo que os pontos C e S pertencem à reta procurada r [pois a reta r intersecta a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e intersecta a reta s], temos $\vec{v_r}$ dado por

$$\vec{v_r}=\overrightarrow{CS}=(3\lambda+\mu+3,6\lambda-\mu+5,\lambda-\mu-1).$$

Seja $\vec{n_\pi}=(2,-1,3)$ o vetor normal ao plano π.

Por hipótese temos $r\,//\,\pi$ e $r\perp\overrightarrow{AB}$. Logo,

$$\vec{v_r}\perp(2,-1,3)\ \text{ e }\ \vec{v_r}\perp(-1,1,1).$$

Seguem os produtos escalares

$$\begin{cases}(2,-1,3)\cdot(3\lambda+\mu+3,6\lambda-\mu+5,\lambda-\mu-1)=0\\[2em](-1,1,1)\cdot(3\lambda+\mu+3,6\lambda-\mu+5,\lambda-\mu-1)=0.\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases}6\lambda+2\mu+6-6\lambda+\mu-5+3\lambda-3\mu-3=0\\-3\lambda-\mu-3+6\lambda-\mu+5+\lambda-\mu-1=0.\end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases}3\lambda=2\\4\lambda-3\mu=-1.\end{cases}$$

Donde segue

$$\lambda = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{11}{9}.$$

Substituindo μ e λ nas expressões para C e S, respectivamente, temos

$$C = \left(-\frac{2}{9}, \frac{11}{9}, \frac{20}{9}\right) \quad \text{e} \quad S = \left(6, 9, \frac{2}{3}\right).$$

Assim, a equação da reta r tem a forma

$$r : X = \left(6, 9, \frac{2}{3}\right) + \nu\left(6 + \frac{2}{9}, 9 - \frac{11}{9}, \frac{2}{3} - \frac{20}{9}\right).$$

$$r : X = \left(6, 9, \frac{2}{3}\right) + \nu\left(56, 70, -14\right).$$

Simplificando encontramos

$$\boxed{r : X = \left(6, 9, \tfrac{2}{3}\right) + \nu\left(4, 5, -1\right) \clubsuit}$$

Vide próxima página.

(4) Capítulo 18 - ÂNGULOS - 4 - Semi-espaço, p. 218 (segunda edição do livro texto).

Ache a reta que intercepta as retas

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x &= -1+5\lambda \\ y &= 1+3\lambda \\ z &= \lambda. \end{cases}$$

e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados.

Solução.

- ⋄ **No plano cartesiano,** vejamos o que ocorre. Vide figura. A bissetriz

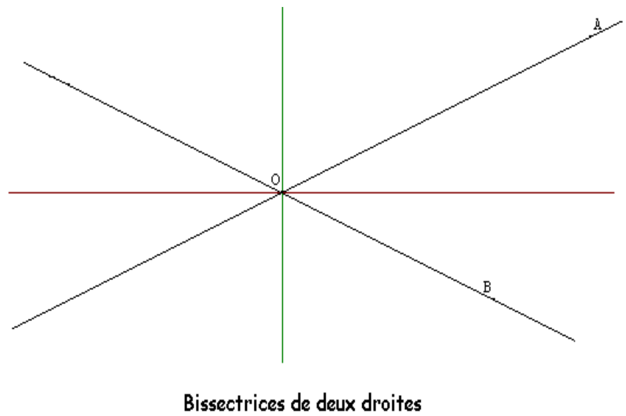

Figura 1: Bissetrizes principal e secundária no plano cartesiano

principal $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ do plano cartesiano forma ângulos conguentes com os eixos Ox e Oy. Vale o mesmo para a bissetriz secundária $\{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$. Somente estas duas retas, no plano cartesiano, tem esta propriedade.

Notemos que os vetores diretores da bissetriz principal e da bissetriz secundária são, respectivamente,

$$(1,1) \quad \text{e} \quad (1,-1).$$

- ⋄ **No espaço cartesiano** $\mathbb{R}^3$, uma reta forma ângulos congruentes com os eixos ordenados se e somente se seu vetor diretor é um dos vetores

$$\boxed{(1,1,1),\ (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1).}$$

Verificação.

Seja t uma reta no espaço. Seja $\overrightarrow{v_t} = (a, b, c)$ seu vetor diretor. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|\overrightarrow{v_t}\| = 1$. Logo,

$$\|\overrightarrow{v_t}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Seja α o ângulo que a reta t forma com o eixo Ox. Por definição, este ângulo é agudo e temos

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Seja α' o ângulo que o vetor $\overrightarrow{v_t}$ forma com o vetor $\overrightarrow{e_1}$. Temos

$$0 \leq \alpha' \leq \pi, \quad \text{sendo } \alpha' = \alpha \text{ ou } \alpha' = \pi - \alpha.$$

É claro que

$$\boxed{\cos\alpha' = \pm\cos\alpha.}$$

O vetor diretor do eixo Ox é $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$. Segue

$$\overrightarrow{v_t} \cdot \overrightarrow{e_1} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = \|\overrightarrow{v_t}\| \, \|\overrightarrow{e_1} \cos\alpha'.$$

Segue

$$a = 1.1.\cos\alpha' = \cos\alpha'.$$

Logo,

$$a = \pm\cos\alpha.$$

Analogamente, t forma ângulos congruentes com Oy e Oz e temos

$$b = \pm\cos\alpha \quad \text{e} \quad c = \pm\cos\alpha.$$

Segue

$$\pm a = \pm b = \pm c.$$

Assim,

$$\overrightarrow{v_t} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Multiplicar por $\sqrt{3}$ mantém a direção do vetor. Há oito possibilidades

$$\overrightarrow{v_t} = (\pm1, \pm1, \pm1).$$

Porém, os vetores $\overrightarrow{v_t}$ e $-\overrightarrow{v_t}$ têm mesma direção. Assim, descartamos quatro possibilidades e ficamos com aquelas já destacadas.

$$\boxed{(1, 1, 1), \ (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1).}$$

◇ A reta procurada forma ângulos congruentes com os eixos. Logo, mantendo a notação acima, podemos chamá-la de t e temos

$$\overrightarrow{v_t} \text{ é qualquer um entre } \{(1,1,1),\ (1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}.$$

◇ Sejam R e S, pontos genérico das retas r e s, respectivamente. Temos (cheque)

$$R = (1+3\mu, 1+2\mu, -3\mu) \quad \text{e} \quad S = (-1+5\lambda, 1+3\lambda, \lambda).$$

Impondo que os pontos R e S pertencem à reta procurada t [pois a reta t intersecta a reta r e intersecta a reta s], temos

$$\overrightarrow{RS} = (5\lambda - 3\mu - 2, 3\lambda - 2\mu, \lambda + 3\mu) \ // \ \overrightarrow{v_t}.$$

◇ **Caso** $(5\lambda - 3\mu - 2, 3\lambda - 2\mu, \lambda + 3\mu) \ // \ (1,1,1)$**.** Neste caso, segue

$$5\lambda - 3\mu - 2 = 3\lambda - 2\mu = \lambda + 3\mu.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{5}{4} \ \text{ e } \ \mu = \frac{1}{2}.$$

Segue

$$\boxed{t : X = \left(\tfrac{5}{2}, 2, -\tfrac{3}{2}\right) + \nu(1,1,1).}$$

◇ **Caso** $(5\lambda - 3\mu - 2, 3\lambda - 2\mu, \lambda + 3\mu) \ // \ (1,1,-1)$**.** Neste cso, segue

$$5\lambda - 3\mu - 2 = 3\lambda - 2\mu = -\lambda - 3\mu.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{3} \ \text{ e } \ \mu = -\frac{4}{3}.$$

Segue

$$\boxed{t : X = \left(-3, -\tfrac{5}{3}, 4\right) + \nu(1,1,-1).}$$

◇ **Caso** $(5\lambda - 3\mu - 2, 3\lambda - 2\mu, \lambda + 3\mu) \ // \ (1,-1,1)$**.** Nese caso, segue

$$5\lambda - 3\mu - 2 = -3\lambda + 2\mu = \lambda + 3\mu.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{14} \ \text{ e } \ \mu = -\frac{2}{7}.$$

Segue

$$\boxed{t : X = \left(\tfrac{1}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + \nu(1,-1,1).}$$

◇ **Caso** $(5\lambda - 3\mu - 2, 3\lambda - 2\mu, \lambda + 3\mu)$ **//** $(-1, 1, 1)$**.** Nese caso, segue

$$-5\lambda + 3\mu + 2 = 3\lambda - 2\mu = \lambda + 3\mu.$$

Logo,

$$\lambda = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{2}{15}.$$

Segue

$$\boxed{t : X = \left(\tfrac{2}{3}, 2, \tfrac{1}{3}\right) + \nu(-1, 1, 1) \clubsuit}$$