CÔNICAS

MAT 105 - GEOMETRIA ANALÍTICA - INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

1º semestre de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

No plano euclidiano consideremos F_1 e F_2 dois pontos **(focos)** distintos.

ELIPSE

(1) Se $2a$ é um comprimento fixo e maior que a distância entre F_1 e F_2, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$ é uma **elipse**.

A **equação padrão da elipse** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a\,,b > 0 \ .$$

Prova: Seja s a reta por F_1 e F_2 e C o ponto médio entre F_1 e F_2.

Trace por C a reta t, perpendicular a s e mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Só há 2 pontos em t (os **polos** da elipse) com soma das distâncias a F_1 e F_2 igual a $2a$ (distam a de F_1 e F_2), simétricos em relação à reta s.

Por semelhança de triângulos é claro que se P é um ponto da elipse, P', o seu simétrico em relação a s, também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a s.

Para o mesmo P, o ponto P'', simétrico de P em relação a t, também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a F_1 e F_2 é $2a$ (verifique).

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e um centro. Então, para desenhá-la basta fazê-lo num quadrante e refletir em relação aos eixos.

Escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy tal que Ox corresponda à reta t, Oy à reta s e a origem O ao ponto médio entre os focos.

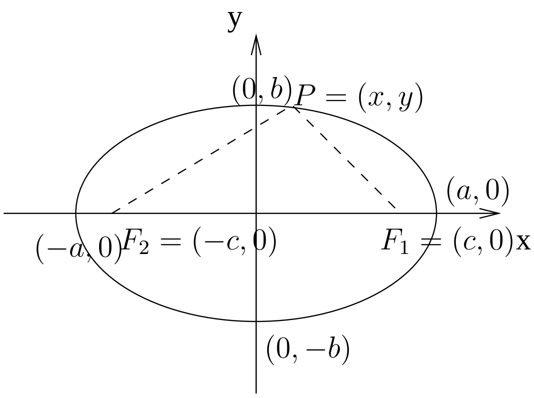

Figura 1: Focos e Vértices - Elipse

Nesse sistema podemos supor $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, onde $c > 0$ é fixo. O segmento $\overline{B_1B_2}$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ pertencentes à elipse, com $b > 0$ (vide Figura 1), é o **semi-eixo menor** da elipse. É fácil ver que $|\overline{B_2F_1}| = |\overline{B_2F_2}| = a$ e

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 \ .$$

Nesse sistema temos os seguintes elementos para uma elipse (vide figura):

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Vértices: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$, com $a > 0$.
- Polos: $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, com $b > 0$.
- Eixo maior $\overline{A_1A_2}$ e eixo-menor $\overline{B_1B_2}$.
- Semi-eixo maior é o número a e semi-eixo menor é o número b.
- Distância focal é o número $2c$ e semi-distância focal é o número c.
- Excentricidade é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo maior}} < 1$.

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad .$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3)\quad |\overline{PF_1}| = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4)\quad |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois $|\overline{PF_2}| = 2a - |\overline{PF_1}|$.

Elevando ao quadrado as equações (3) e (4) obtemos

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 + y^2 = a^2 \ \mp 2cx \ + \ \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando, $(\frac{a^2-c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, finalmente,

$$(5)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

Excentricidade e retas diretrizes

As fórmulas (3) e (4) dos comprimentos dos **raios focais** direito e esquerdo $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$ podem ser escritas como

$$|\overline{PF_1}| = a - \frac{c}{a}x = e[\frac{a}{e} - x] \quad , \quad |\overline{PF_2}| = a + \frac{c}{a}x = e[x - (-\frac{a}{e})],$$

onde $e = \frac{c}{a}$ é a **excentricidade** da elipse. As quantidades entre colchetes (vide Figura 2) são as distâncias $|PD|$ e $|PD'|$ de P às **retas diretrizes**

$$D: \ x = \frac{a}{e} \qquad \text{e} \qquad D': \ x = -\frac{a}{e}\,,$$

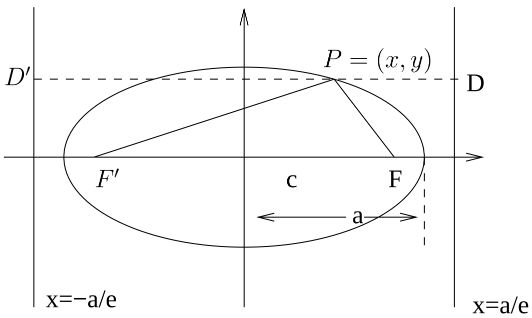

Figura 2: posições- elipse

respectivamente. Logo, tais fórmulas podem ser escritas na forma

$$(6) \qquad \frac{|PF|}{|PD|} = e \quad , \quad \frac{|PF'|}{|PD'|} = e.$$

Notemos que basta uma das equações de (6) para descrever toda a elipse.

A excentricidade $e = \frac{c}{a}$ satisfaz:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \ .$$

Note que $0 < e < 1$. Para as elipses aproximadamente circulares temos $e \approx 0$ e, para as alongadas e finas, $e \approx 1$. Por vezes, a circunferência é dita uma elipse degenerada com $e \approx 0$.

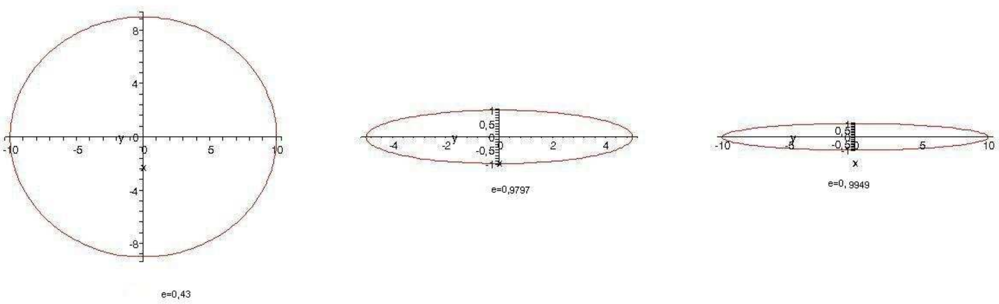

Figura 3: Excentricidades - Elipses

HIPÉRBOLE

(2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, $a > 0$, é uma **hipérbole**. Os pontos F_1 e F_2 são denominados focos.

A **equação padrão da hipérbole** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a \, , b > 0 \ .$$

Observações.

- Se P, no plano, não é um foco, pela desigualdade triangular temos $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$. Logo, $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$ e, mutatis mutandis, $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$. Assim,

$$\big|\, |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| \,\big| \leq |\overline{F_1F_2}| \, , \ \forall P \ .$$

  A **condição de existência** da hipérbole é então: $2a < |\overline{F_1F_2}|$.

- Para P na hipérbole temos $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$ ou $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$. Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \qquad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a \ .$$

  O ramo direito (esquerdo) da hipérbole é obtido atribuindo o sinal $+$ $(-)$ em (H).

Determinação da equação padrão: Consideremos Oxy um sistema de cooordenadas cartesianas com o eixo x contendo o segmento $\overline{F_1F_2}$ e por eixo y a mediatriz deste segmento. Vide Figura 4 abaixo.

Supondo $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ ($0 < a < c$) temos : $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$.

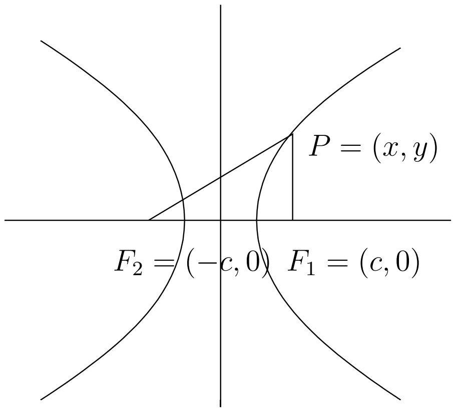

Figura 4: Hipérbole-Focos

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas é,

$$(1) \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \ .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 \ = \ [\pm 2a + |\overline{PF_1}|\,]^2 \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}| + (x-c)^2 + y^2 \ ,$$

donde

$$4cx \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}|$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2) \quad |\overline{PF_1}| \ = \ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm(\frac{c}{a}x - a)$$

e

$$(3) \quad |\overline{PF_2}| \ = \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \ = \ \pm(\frac{c}{a}x + a) \ ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$. Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da curva e o negativo ao esquerdo. Os quadrados destas equações fornecem:

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 \ + \ y^2 \ = \ \frac{c^2}{a^2}x^2 \ \mp 2cx \ + \ a^2 \ ;$$

que reduzimos a,

$$(\frac{c^2 - a^2}{a^2})x^2 - y^2 \;=\; c^2 - a^2 \;,$$

ou,

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \;.$$

Pela condição de existência, $0 < a < c$, temos $c^2 - a^2 > 0$ e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2 \;,$$

e substituindo esta em (4):

$$(5) \;\; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;.$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implia (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

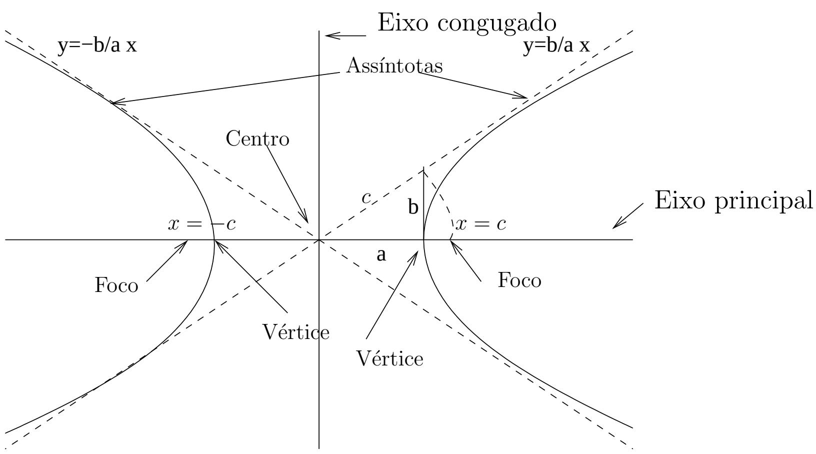

Figura 5: Hipérbole - Assíntotas

Notemos o **triângulo retângulo** de vértices em $(0,0)$, $(a,0)$ e (a,b). Justificaremos agora o desenho acima para a hipérbole dada pela equação (5).

Elementos de uma hipérbole:

- Focos: $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, com $c > 0$.
- Centro: o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$.
- Vértices: $A_1 = (a, 0)$ e $A_2 = (-a, 0)$, com $a > 0$.
- Eixo real: o segmento $\overline{A_1A_2}$.
- Semi-eixo real: o número a.
- Eixo principal: a reta contendo os focos e o eixo real.
- Eixo transverso ou imaginário ou conjugado: a mediatriz do eixo real.
- Distância focal: o número $2c = |\overline{F_1F_2}|$.
- Semi-distância focal: o número c.
- Semi-eixo transverso: o número $b > 0$ definido pela relação $b^2 = c^2 - a^2$.
- Assíntotas: as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.
- Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a} = \frac{\text{semi-distância focal}}{\text{semi-eixo real}} > 1$.

Como a equação contém apenas potências pares de x e y, a hipérbole é simétrica em relação aos eixos coordenados, chamados eixos da curva, sendo a interseção destes o **centro** da hipérbole.

Quando $y = 0$, temos $x = \pm a$; mas, quando $x = 0$, y é imaginário. Logo, o eixo que passa pelos focos, dito **eixo principal**, intersecta a curva em dois pontos denominados **vértices**, localizados a uma distância a de cada lado do centro; mas o outro eixo, não intersecta a curva (porém, existe solução y complexa) e é chamado **eixo conjugado**.

A hipérbole é formada por dois **ramos** simétricos em relação ao eixo y, e, por (5), os pontos mais próximos ao eixo conjugado $\overrightarrow{Oy}$, correspondentes ao menor valor para $|x|$, são os vértices (ou **focos**) $F_2 = (-c, 0)$ e $F_1 = (c, 0)$.

Estes fatos são também identificáveis resolvendo a equação (5) para y:

$$(6) \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \ , \ x \leq -a \ \ ou \ \ x \geq a \ .$$

Esta fórmula mostra que não há pontos do gráfico (um ramo da hipérbole) na faixa vertical $-a < x < a$, pois para tais x a expressão sob o radical é negativa. Para $x = \pm a$, temos $y = 0$; esses dois pontos são os vértices. Quando x cresce a partir de a ou decresce a partir de $-a$, obtemos dois valores de sinais opostos (em cada caso), de y, crescentes em valor absoluto, à medida que x tende a $+\infty$ ou x tende a $-\infty$; tal comportamento produz os braços superior e inferior nos ramos da curva.

Um aspecto significativo do gráfico pode ser notado escrevendo (6) na forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \ .$$

Quando x tende a $\pm\infty$, a expressão sob o radical é próxima de 1, sendo razoável supor que a hipérbole está próxima do par de retas

$$y = \pm \frac{b}{a} x \ .$$

Devido as simetrias basta analisarmos tal idéia no primeiro quadrante. Neste caso é fácil ver que a reta está acima do ramo da hipérbole, e também que a distância vertical da hipérbole à reta correspondente é

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \ ; \end{aligned}$$

a qual tende a zero quando $x \to +\infty$. As retas acima mencionadas são chamadas **assíntotas da hipérbole**.

O triângulo mostrado no primeiro quadrante da Figura 5 é um mnemônico para lembrar os principais aspectos geométricos de uma hipérbole. Sua base a é a distância do centro ao vértice à direita, a altura b é o segmento vertical que une esse vértice à assíntota do primeiro quadrante, cujo coeficiente angular é b/a e, como por (4) temos $c^2 = a^2 + b^2$, a hipotenusa c desse triângulo é também a distância do centro a um foco.

A razão $e = c/a$ é denominada a **excentricidade** da hipérbole e temos:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \ .$$

É óbvio que $e > 1$. Quando e é próximo de 1, b é pequeno em relação a a, a hipérbole se localiza em um ângulo pequeno formado pelas assíntotas e a curva é bem fechada nos vértices. Quando e é grande, então b é grande quando comparado com a, o ângulo entre as assíntotas é grande e a hipérbole é bastante achatada no vértices. Vide Figura abaixo.

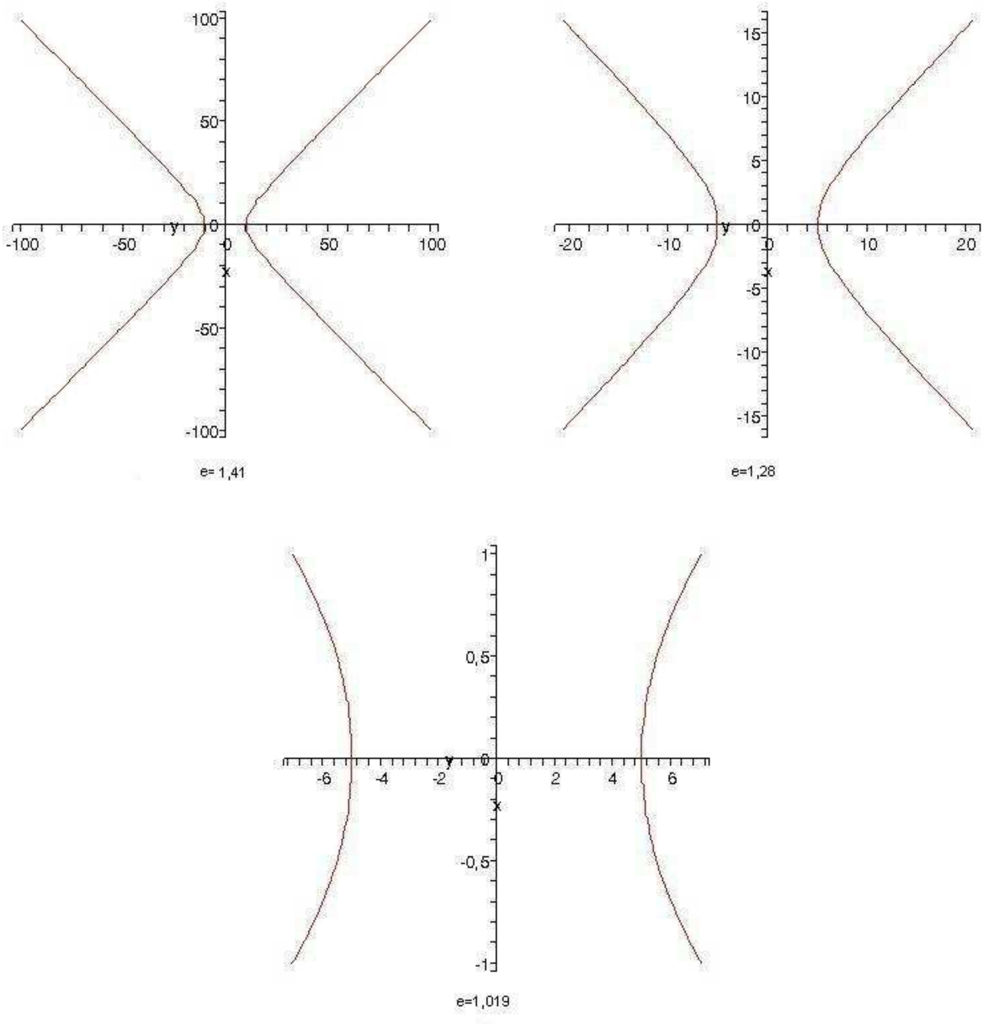

Figura 6: Hipérboles - Excentricidades

As fórmulas (2) e (3) dos comprimentos dos raios focais direito e esquerdo $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$ podem ser escritas como

$$|\overline{PF_1}| = \pm\,(ex - a) = \pm\, e\left[x - \frac{a}{e}\right], \quad |\overline{PF_2}| = \pm\,(ex + a) = \pm\, e[x - (-\frac{a}{e}),$$

os sinais positivos referindo-se ao ramo direito e os negativos ao esquerdo. Se P está no direito (Figura 5) as quantidades entre colchetes são as distâncias $|PD|$ e $|PD'|$ de P às retas, ditas **diretrizes**, $x = a/e$ e $x = -a/e$, respectivamente. Analogamente, se P estiver no ramo esquerdo. Em qualquer caso, ambas podem ser escritas na forma

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e \quad , \quad \frac{|PF'|}{|PD'|} = e\ .$$

Uma hipérbole pode então ser caracterizada como a trajetória de um ponto que se move de modo a manter constante $e > 1$ a razão entre sua distância a um ponto fixo (foco) e sua distância a uma reta fixa (diretriz). Como no caso das elipses, é suficiente uma das equações acima para descrever toda a hipérbole.

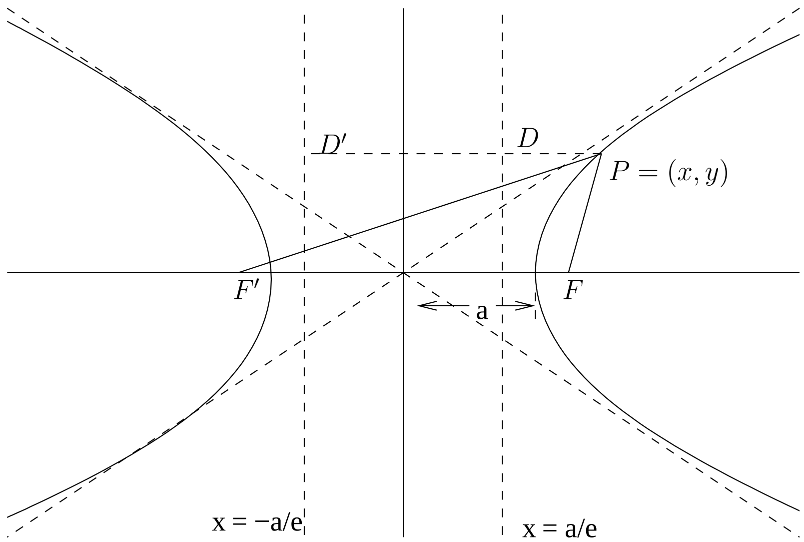

Figura 7: Hipérbole - Diretrizes

Observações.

- Invertendo as variáveis x e y em (5), vemos que a equação $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ representa uma hipérbole com eixo principal vertical, vértices $(0, \pm a)$ e focos $(0, \pm c)$, onde, como no caso anterior, $c^2 = a^2 + b^2$. Porém, neste caso, as assíntotas são as retas $y = \pm\frac{a}{b}x$, como vemos fácilmente ao resolvermos para y os dois ramos desta hipérbole:

$$y = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}\ .$$

O eixo contendo os focos não é estabelecido pela proporção entre a e b, como com uma elipse, mas sim por sabermos qual termo é subtraído de qual, na forma reduzida da equação; a e b podem, então, ser de quaisquer tamanho relativos. Se $a = b$ as assíntotas são perpendiculares entre si (**bissetrizes principal e secundária**) e dizemos que temos uma **hipérbole equilátera**.

- Uma reta intersecta uma hipérbole, C, em no máximo dois pontos e, em tal caso, a chamamos **secante**. Se $P \in C$, existem apenas três retas intersectando-a unicamente em P. Duas são paralelas a uma das assíntotas, e cruzam-na, e a terceira é a tangente (vide Figura 8).

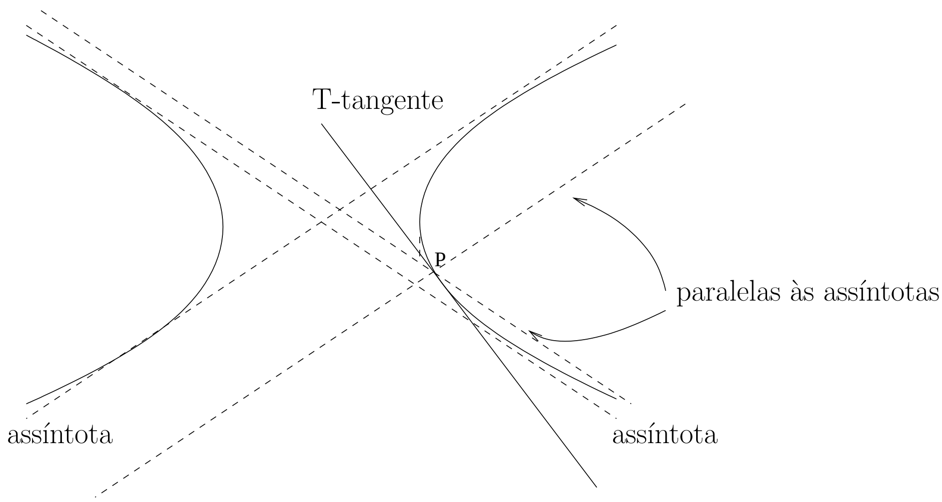

Figura 8: Hipérbole - Tangente e Paralelas às Assíntotas

PARÁBOLA

(3) Fixados no plano euclidiano, um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), com $F \notin d$, o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias a F e a d são iguais é uma **parábola**.

A **equação padrão da parábola** é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 \;=\; 4py \;\; p > 0 \;.$$

Observação. A parábola é simétrica em relação à reta por F perpendicular a d, dita **eixo de simetria da parábola**. O ponto médio entre F e a projeção de F sobre a reta diretriz d (equidistante entre F e d) é o ponto da parábola mais próximo de d e dito **vértice da parábola**.

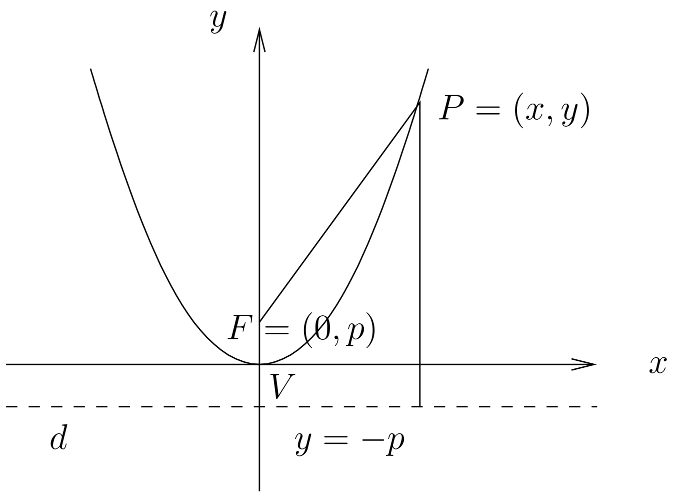

Figura 9: Parábola

Determinação da Equação Padrão:

Seja Oxy um sistema cartesiano de coordenadas tal que: (i) o eixo y corresponde ao eixo de simetria (ii) a origem ao vértice, (iii) o eixo x à reta pela origem, paralela a d e, (iv) orientemos o eixo y tal que $F = (0, p), p > 0$. Assim, d tem por equação $y = -p$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py \ .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

Observação. A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, é fácil ver que sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

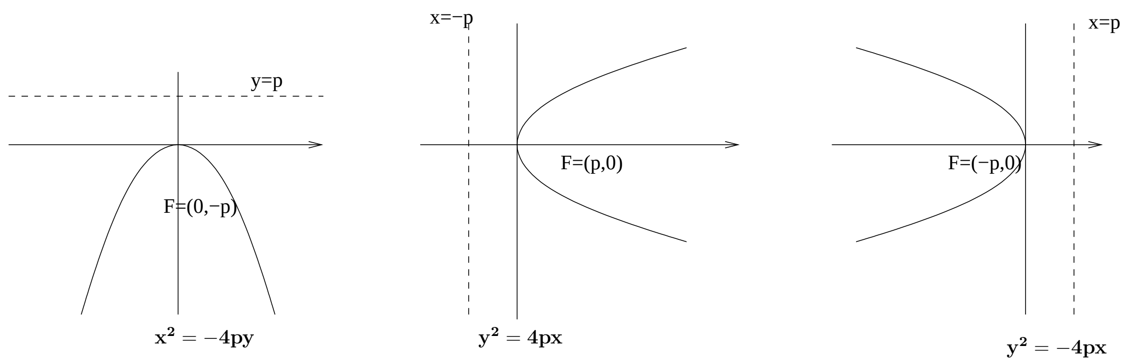

Figura 10: posições e equações- parábolas

COORDENADAS POLARES DE UMA CÔNICA

As coordenadas polares são excelentes para descrevemos cônicas no plano, pois a equação é simples e tem a mesma forma para elas, exceto a circunferência.

Consideremos uma cônica com excentricidade e, $e > 0$, reta diretriz $x = -p,\ p > 0$, e foco na origem (Figura 5).

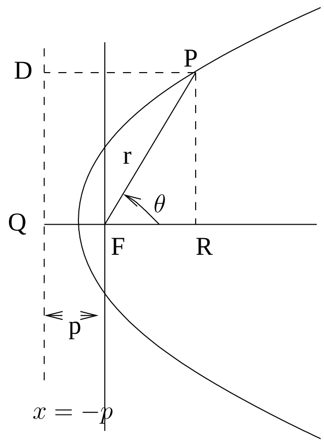

Figura 11: coordenadas polares de uma cônica

Equação Polar de uma Cônica que não a Circunferência. Com a notação dada na figura, a equação foco-diretriz-excentricidade de uma cônica, que não a circunferência, é

$$\frac{|\overline{PF}|}{|PD|} = e \quad , \ 0 < e < 1 \ .$$

A curva é uma

$$\begin{cases} \text{elipse} & \text{se } 0 < e < 1\,, \\ \text{parábola} & \text{se } e = 1\,, \\ \text{hipérbole} & \text{se } e > 1\,. \end{cases}$$

Utilizando coordenadas polares vemos que $|\overline{PF}| = r$ e

$$|PD| = |\overline{QR}| = |\overline{QF}| + |\overline{FR}| = p + rcos\theta \ ,$$

logo,

$$r = |\overline{PF}| = e|PD| = e(p + rcos\theta) \ .$$

Resolvendo tal equação para r concluímos que a equação polar da cônica é,

$$(1) \qquad r = \frac{ep}{1 - ecos\theta} \ ,$$

sendo ela uma parábola se $e = 1$, uma elipse se $e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

Caso a reta diretriz esteja à direita da origem, $x = p \ , \ p > 0$ (v. Figura 12), então

$$|PD| = p - rcos\theta \quad , \quad |\overline{PF}| = e|PD|$$

e

$$r = e(p - rcos\theta) \quad \Rightarrow \ r = \frac{ep}{1 + ecos\theta} \ .$$

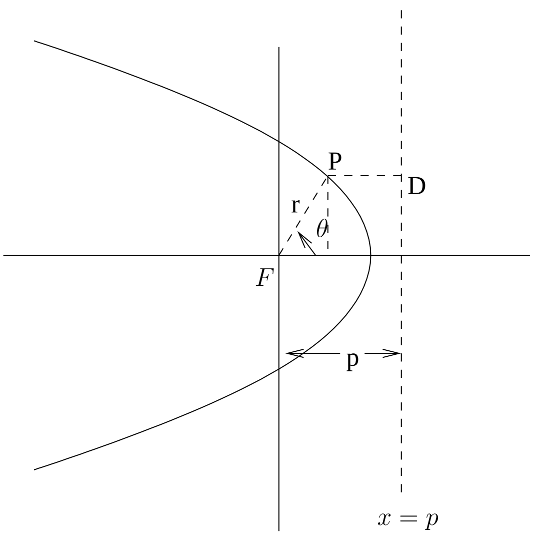

Figura 12: Diretriz à direita

Equação Polar de uma Elipse No caso de uma elipse ($e < 1$) é também útil (em astronomia, por exemplo) expressarmos a posição, r, em termos da excentricidade e do semi-eixo maior a. Por (1) temos que $ep = r - ercos\theta$ e então, $r = e(p + rcos\theta)$. Passando às coordenadas cartesianas obtemos

$$x^2 + y^2 = e^2(p + x)^2 = e^2(p^2 + 2px + x^2) \quad ;$$

donde,

$$(1 - e^2)x^2 - 2e^2px + y^2 = e^2p^2 \ .$$

Agora, dividindo por $(1 - e^2)$ (pois a curva não é uma parábola) e completando quadrados temos

$$\left(x - \frac{pe^2}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{e^4p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2p^2}{1 - e^2} \ ,$$

e assim, denotando $x_o = \frac{pe^2}{1-e^2}$, chegamos a

$$(x - x_o)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2p^2}{1 - e^2}\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right) = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} \ ,$$

a qual escrevemos em sua forma padrâo, $\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$, com $a = \frac{ep}{(1-e^2)}$. Substituindo $ep = a(1 - e^2)$ em (1) concluímos que (observação: abaixo, se $e = 0$ temos uma circunferência).

$$(2) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - ecos\theta} \quad \blacksquare$$

ROTAÇÃO DE EIXOS E CLASSIFICAÇÃO - "IDENTIFICAÇÃO" ENTRE QUÁDRICAS E CÔNICAS

Consideremos a equação geral do segundo grau em x e y tal que A ou B ou C é um número não nulo:

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad .$$

Uma quádrica (ou gráfico ou curva) é uma solução de (1); isto é, o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo (1). As quatro cônicas no plano são, óbviamente, quádricas e estão assim algébricamente unificadas.

1 Teorema *Toda quádrica é uma circunferência, uma parábola, uma elipse, uma hipérbole, um ponto, o conjunto vazio, uma única reta ou um par de retas (concorrentes ou paralelas).*

Idéia da prova: O termo misto Bxy é o nó górdio para a identificação geométrica da solução. Até aqui a visualização foi simples pois as curvas foram apresentadas em forma padrão, com eixos de simetria paralelos aos tradicionais e, assim, sem termo misto. Como circunferências, elipses e hipérboles têm eixos perpendiculares e parábolas têm eixos e retas diretrizes ortogonais podemos esperar que com uma rotação adequada possamos obter uma equação equivalente em forma padrão . Como exemplo, elimine o termo misto em $xy = 1$.

Na demonstração do Teorema 1 além de determinarmos o ângulo de rotação que desacopla as variáveis as características abaixo emergirão.

1. A natureza das curvas sendo invariante por rotações, obteremos uma relação entre os coeficientes refletindo tal fato.

2. No espaço vimos que $\beta_o = \alpha$ é o ângulo em que a natureza das cônicas muda. Se β, o ângulo de inclinação do plano secante em relação ao eixo do cone, é igual a β_o temos uma parábola. No plano, as características das

curvas mudam em $e = 1$, a excentricidade da parábola. É razoável então que a parábola, uma vez mais, mostre-se singular.

Verifiquemos o Teorema 1 no caso trivial, em que não existe termo misto.

(Caso B = 0) Temos as quatro possibilidades abaixo para os gráficos de

$$(1') \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ , A \neq 0 \ ou \ C \neq 0 \ :$$

1. Uma circunferência, se $A = C$ (ou um ponto ou o vazio).
2. Uma elipse, se A e C têm mesmo sinal e $A \neq C$(ou um ponto ou o vazio).
3. Uma hipérbole, se A e C têm sinais opostos (ou um par de retas concorrentes).
4. Uma parábola se $A = 0$ ou $C = 0$ (ou uma reta ou duas retas paralelas ou o vazio).

Demonstração:

1, 2 e 3: Temos A e C não nulos. Reescrevemos (1') na forma

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0$$

e, completando quadrados,

$$A\left[(x + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] + C\left[(y + \frac{E}{2C})^2 - \frac{E^2}{4C^2}\right] + F = 0$$

logo, definindo $x_o = -\frac{D}{2A}$, $y_o = -\frac{E}{2C}$ e $\gamma = \frac{AE^2+CD^2-4ACF}{4AC}$ temos

$$(1'') \quad A(x - x_o)^2 + C(y - y_o)^2 = \gamma \ , \ AC \neq 0 \ .$$

Se A e C têm mesmo sinal podemos supo-lo positivo. Logo, a solução não existe (se $\gamma < 0$), é um ponto (se $\gamma = 0$), é uma circunferência (se $\gamma > 0$ e $A = B$) ou é uma elipse (se $\gamma > 0$ e $A \neq B$).

Se A e C têm sinais opostos, podemos supor $A = \frac{1}{a^2}$, com $a \neq 0$, e $C = -\frac{1}{c^2}$, com $c \neq 0$. Temos então,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{c^2} = \gamma \ ;$$

que é uma hipérbole se $\gamma \neq 0$ (dividindo por γ temos a equação padrão) e, se $\gamma = 0$, fatoramos (1") e obtemos o par de retas concorrentes,

$$\frac{x - x_o}{a} - \frac{y - y_o}{c} = 0 \quad , \quad \frac{x - x_o}{a} + \frac{y - y_o}{c} = 0 \quad .$$

4. É suficiente analisarmos $C = 0$ e $A = 1$. Então, $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, se $E \neq 0$,

$$y = \frac{-x^2 - Dx - F}{E} \ ,$$

é uma parábola; se $E = 0$, temos $x^2 + Dx + F = 0$ e (x, y) é solução se x é raíz de $x^2 + Dx + F = 0$, a qual têm (uma ou duas) ou não solução, e obtemos o vazio ou uma ou duas retas verticais ■

2 Definição. *O ponto, o vazio, uma reta ou um par de retas são quádricas degeneradas.*

A justificativa para uma tal definição é de ordem prática: objetivamos estudar parábolas, elipses e hipérboles. Poderíamos definir a circunferência também degenerada e, por vezes, a vemos como uma elipse degenerada, com excentricidade zero como curva plana ou limite de elipses quando o plano secante tende ao plano perp endicular ao eixo do cone. Notemos que um par de retas paralelas é uma quádrica (degenerada) porém não é uma seção cônica (degenerada).

Com a notação acima, vemos que uma solução de (1') não degenerada é:

- uma circunferência se e somente se $A = C$,
- uma elipse se e somente se $AC > 0$ e $A \neq C$,
- uma hipérbole se e somente se $AC < 0$ e
- uma parábola se e somente $A = 0$ ou $C = 0$.

Demonstração do Teorema 1.

Podemos assumir $B \neq 0$. Consideremos o plano cartesiano xy e uma rotação de eixos, no sentido anti-horário, por um ângulo θ (Figura 13).

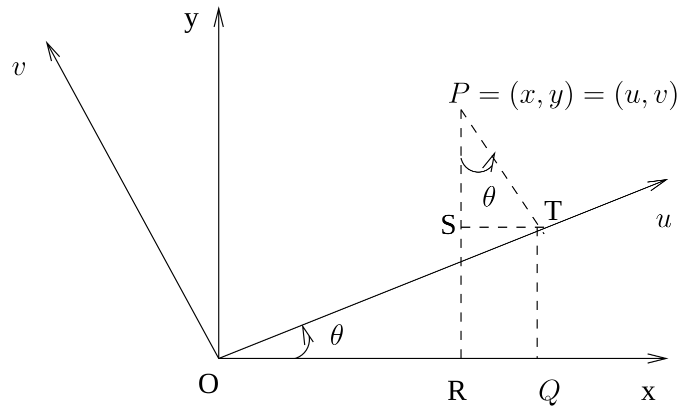

Figura 13: Rotação de Eixos

Um ponto P do plano têm então dois pares de coordenadas retangulares (x, y) e (u, v). Observemos, a partir da figura, que

$$\begin{cases} x = |OR| = |OQ| - |RQ| = |OQ| - |ST| = ucos\theta - vsen\theta \\ y = |PR| = |RS| + |SP| = |QT| + |SP| = usen\theta + vcos\theta \ ; \end{cases}$$

as quais são chamadas equações da rotação. Em notação matricial temos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} .$$

Substituindo as equações de rotação em (1) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= A(ucos\theta - vsen\theta)^2 + B(ucos\theta - vsen\theta)(usen\theta + vcos\theta) + \\ &+ C(usen\theta + vcos\theta)^2 + D(ucos\theta - vsen\theta) + E(usen\theta + vcos\theta) + F \ . \end{aligned}$$

Identificando os coeficientes nas variáveis u e v, obtemos

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0 \ ,$$

sendo que:

$$\begin{cases} A' = Acos^2\theta + Bsen\theta cos\theta + Csen^2\theta \\ B' = -2Asen\theta cos\theta + B(cos^2\theta - sen^2\theta) + 2Csen\theta cos\theta \\ C' = Asen^2\theta - Bsen\theta cos\theta + Ccos^2\theta \\ D' = Dcos\theta + Esen\theta \\ E' = -Dsen\theta + Ecos\theta \\ F' = F \ ; \end{cases}$$

chamemos a estas equações de fórmulas simples (pois utilizam o arco simples θ) para a mudança de coeficientes pela rotação.

Substituindo as fórmulas para o duplo arco

$$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta \quad , \quad cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$$

nas fórmulas simples, obtemos as fórmulas sintéticas

$$\begin{cases} A' = Acos^2\theta + \frac{B}{2}sen2\theta + Csen^2\theta \\ B' = (C - A)sen2\theta + Bcos2\theta \\ C' = Asen^2\theta - \frac{B}{2}sen2\theta + Ccos^2\theta \\ D' = Dcos\theta + Esen\theta \\ E' = -Dsen\theta + Ecos\theta \\ F' = F \ . \end{cases}$$

Pelas fórmulas sintéticas temos que $B' = 0$ se e somente se, $Bcos2\theta = (A - C)sen2\theta$. Escolhemos então θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, tal que (por hipótese $B \neq 0$)

$$cotg2\theta = \frac{A - C}{B} \quad \blacksquare$$

CARACTERIZAÇÃO ALGÉBRICA (DISCRIMINANTE) - TRANSLAÇÕES - COMPOSIÇÃO DE ROTAÇÕES

3 Proposição. *Dada (1), as expressões* $\Delta = B^2 - 4AC$ *e* $A + C$ *são invariantes por rotação.*

Prova: É óbvio que $A + C$ é invariante por rotação. Quanto a Δ, temos, pelas fórmulas simples,

$$\begin{aligned}
B'^2 &= [2(C-A)sen\theta cos\theta + (cos^2\theta - sen^2\theta)B]^2 \\
&= 4(C-A)^2 sen^2\theta cos^2\theta + 4B(C-A)sen\theta cos\theta(cos^2\theta - sen^2\theta) \\
&\quad + (cos^2\theta - sen^2\theta)^2 B^2 = \\
&= 4A^2 sen^2\theta cos^2\theta + B^2(cos^2\theta - sen^2\theta)^2 + 4C^2 sen^2\theta cos^2\theta \\
&\quad - 4ABsen\theta cos\theta(cos^2\theta - sen^2\theta) - 8ACsen^2\theta cos^2\theta \\
&\quad + 4BCsen\theta cos\theta(cos^2\theta - sen^2\theta)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A'C' &= (Acos^2\theta + Bsen\theta cos\theta + Csen^2\theta)(Asen^2\theta - Bsen\theta cos\theta + Ccos^2\theta) = \\
&= A^2 sen^2\theta cos^2\theta - B^2 sen^2\theta cos^2\theta + C^2 sen^2\theta cos^2\theta + \\
&\quad + AB(sen^2\theta - cos^2\theta)sen\theta cos\theta + AC(sen^4\theta + cos^4\theta) \\
&\quad + BC(cos^2\theta - sen^2\theta)sen\theta cos\theta\ .
\end{aligned}$$

Computando $B'^2 - 4A'C'$(evidenciando os coeficientes de A^2, B^2, C^2, AB, etc) obtemos

$$\begin{aligned}
B'^2 - 4A'C' &= 0.A^2 + [(cos^2\theta - sen^2\theta)^2 + 4sen^2\theta cos^2\theta]B^2 + 0.C^2 + \\
&\quad + 0.AB + (-8sen^2\theta cos^2\theta - 4sen^4\theta - 4cos^4\theta)AC + 0.BC = \\
&= (cos^4\theta + 2sen^2\theta cos^2\theta + sen^4\theta)B^2 \\
&\quad - 4(sen^4\theta + 2sen^2\theta cos^2\theta + cos^4\theta)AC = \\
&= (cos^2\theta + sen^2\theta)^2 B^2 - 4(sen^2\theta + cos^2\theta)^2 AC = B^2 - 4AC \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4 Definição. $\Delta = B^2 - 4AC$ *é denominado invariante algébrico ou discriminante de (1).*

Observação: Dada uma quádrica como em (1), associamos a ela a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} ,$$

cujo determinante, $det(M) = |M| = AC - \frac{B^2}{4} = -\frac{\Delta}{4}$ e traço, $tr(M) = (A + C)$, são invariantes por rotação. Podemos então definir o polinômio característico à quádrica:

$$p(\lambda) = det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{\Delta}{4},$$

pois os coeficientes são invariantes por rotação.

Fixando θ tal que $B' = 0$, simplifiquemos o cálculo dos demais coeficientes.

5 Proposição. *Com a notação acima, A' e C' são as raízes do polinômio característico.*

Prova: Se λ é raíz do polinômio característico então,

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{B^2 - 4AC}{4} = \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{\Delta}{4} = 0 \ .$$

Logo, a soma das raízes é $A+C$ e o produto é $-\frac{\Delta}{4}$. Já vimos que $A'+C' = A + C$, qualquer que seja a rotação e, para este específico ângulo, $B' = 0$. Portanto, sendo o discriminante invariante por rotação, $\Delta = B'^2 - 4A'C' = -4A'C'$, e a equação ganha a forma

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + A'C' = 0 \ .$$

Por fim, pela regra da soma e produto, A' e C' são as raízes da equação ■

Observação:

- Se as raízes são distintas é necessário distingui-las. Notemos que

  $$A' - C' = (A - C)cos2\theta + Bsen2\theta \ .$$

  Logo, $\frac{A'-C'}{A-C} = cos2\theta + \frac{B}{A-C}sen2\theta = cos2\theta + tg2\theta sen2\theta = \frac{1}{cos2\theta}$ e portanto

  $$cos2\theta = \frac{A - C}{A' - C'} \ ;$$

  a qual faz a distinção.

6 Teorema. *A quádrica dada por (1), se não degenerada e com discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$, é uma*

$$\begin{cases} \textit{elipse ou circunferência,} & se\ \Delta < 0, \\ \textit{parábola,} & se\ \Delta = 0, \\ \textit{hipérbole,} & se\ \Delta > 0 \ . \end{cases}$$

Demonstração: Por uma rotação podemos assumir $B = 0$; logo, $\Delta = -4AC$. Se $\Delta < 0$, $AC > 0$ e temos uma elipse ou circunferência (ou ponto ou $\emptyset$); se $\Delta = 0$ então $A = 0$ ou $C = 0$ (mas não ambos), temos uma parábola, uma reta, duas retas paralelas ou $\emptyset$ e, se $\Delta > 0$, A e C têm sinais opostos, temos uma hipérbole ou duas retas concorrentes ■

7 Teorema *Uma solução de (1), que não seja um ponto ou o vazio, é uma circunferência se e somente se $B = 0$ e $A = C$.*

Demonstração: Suponhamos uma rotação tal que $B' = 0$ (se $B = 0$ tomemos $\theta = 0$). Então, pela verificação feita no Teorema 1, a quádrica é uma circunferência se e sómente se $A' = C'$. Entretanto, como A' e C' são as raízes do polinômio característico, isto ocorre se o somente se o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (A+C)\lambda - \frac{\Delta}{4}$, tem raíz dupla, o que é equivalente ao discriminante de tal polinômio ser nulo. Isto é,

$$(A + C)^2 + \Delta = (A + C)^2 + (B^2 - 4AC) = (A - C)^2 + B^2 = 0 \ ;$$

cuja única solução é $A = C$ e $B = 0$ ■

8 Definição. *A quádrica é de tipo elíptico se $\Delta < 0$; parabólico se $\Delta = 0$, e hiperbólico se $\Delta > 0$.*

Obs: Por tal classificação, um ponto é de tipo elíptico, duas retas concorrentes têm tipo hiperbólico e, por último, uma reta ou duas retas paralelas têm tipo parabólico. Interpretamos as como degenerescências de elipses, hipérboles e parábolas, respectivamente. Justifique geométricamente. Na seção 2 observamos que duas retas paralelas não é uma uma seção cônica.

Identificação: Há uma óbvia correspondência entre quádricas não degeneradas, cônicas no plano e cônicas (seções cônicas não degeneradas de um cone no espaço). Alguns autores, abusando da linguagem, identificam quádricas e cônicas e outros não. Neste texto não adotamos tal identificação.

Simplifiquemos (1), se possível, eliminando os coeficientes dos termos de grau 1 com uma translação. Isto é, determinemos $x = u + h$, $y = v + k$, $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, tal que (1) tenha a forma,

$$\bar{A}u^2 + \bar{B}uv + \bar{C}v^2 + \bar{F} = 0 \ .$$

Procedendo à substituição das equações de translação em (1) obtemos

$$A(u + h)^2 + B(u + h)(v + k) + C(v + k)^2 + D(u + h) + E(v + k) + F = 0 \ ,$$

que reagrupando, e destacando os coeficientes nas variáveis u e v, é escrita como

$$\begin{cases} Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + (Bh + 2Ck + E)v + P(h, k) = 0 \\ P(h, k) = Ah^2 + Bhk + +Ck^2 + Dh + Ek + F \ , \end{cases}$$

e então devemos determinar (h, k) tal que

$$\begin{cases} 2Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + 2Ck + E = 0 \ , \end{cases}$$

utilizando uma vez mais a matriz M associada à quadrica obtemos,

$$\begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 2M \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ -E \end{bmatrix}$$

sendo o determinante de $2M$ igual a $4AC - B^2 = -\Delta$. Temos então a observação abaixo.

Obs: Eliminado o termo misto ($B' = 0$) temos (i) se $\Delta \neq 0$ eliminamos também os termos de grau 1; (ii) se $\Delta = 0$, a solução têm tipo parabólico e pode ser impossível eliminar os termos de grau 1; porém, $\Delta = -4A'C'$, logo, $A' = 0$ ou $C' = 0$ (não ambos) e reduzimos (1).

Notação: Denotando por R_θ a rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário temos

$$(x, y) = R_\theta(u, v) = (ucos\theta - vsen\theta \ , \ usen\theta + vcos\theta) \ ,$$

ou,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \forall(u, v) \in R^2 \ .$$

9 Proposição. *A composição das rotações R_θ e R_ϕ é a rotação $R_{\theta+\phi}$. Isto é, $R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta}$.*

Demonstração: Por definição

$$R_\theta(u, v) = (ucos\theta - vsen\theta, usen\theta + vcos\theta)$$

e assim, se $(x, y) = R_\phi(R_\theta(u, v))$, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\phi & -sen\phi \\ sen\phi & cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\phi cos\theta - sen\phi sen\theta & -cos\phi sen\theta - sen\phi cos\theta \\ sen\phi cos\theta + cos\phi sen\theta & -sen\phi sen\theta + cos\phi cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

e, utilizando as fórmulas trigonométricas para coseno e seno da adição de dois ângulos,

$$\begin{cases} cos(\phi + \theta) = cos\phi cos\theta - sen\phi sen\theta \\ sen(\phi + \theta) = sen\phi cos\theta + cos\phi sen\theta \ , \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\phi+\theta) & -sen(\phi+\theta) \\ sen(\phi+\theta) & cos(\phi+\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = R_{\phi+\theta}(u,v) \quad \blacksquare$$

Observação. O ângulo θ tal que a a rotação R_θ elimina o termo misto satisfaz a equação trigonométrica

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{cotg2\theta}{\sqrt{1+cotg^2 2\theta}}\Big) \; ,$$

a qual permite computar $sen\theta$, R_θ e $tg\theta$, e identificar ângulo de rotação .