MAT 105 - Geometria Analítica
Prova Substitutiva - 08/07/2016

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________**GABARITO**____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens
Boa sorte!

1. Determine o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos pontos

$$A = (1, 1, 1),\ B = (1, -1, -3) \ \text{ e } \ C = (2, 3, -4)\ .$$

Solução.
O conjunto dos pontos equidistantes aos pontos A e B é um plano. Vide figura.

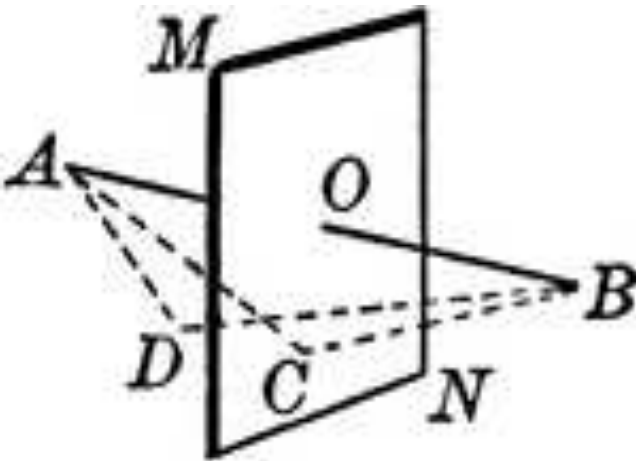

Figura 1: O plano M esboçado é equidistante dos pontos A e B.

Mostraremos então que o conjunto procurado é a intersecção de dois planos (não parelelos e não coincidentes) e é portanto uma reta.

Seja $X = (x, y, z)$ em E^3, com X equidistante dos pontos A, B e C. Segue

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2 = (x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2.$$

Logo,

$$-2x - 2y - 2z + 3 = -2x + 2y + 6z + 11 = -4x - 6y + 8z + 29.$$

Segue

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z + 3 = -2x + 2y + 6z + 11, \\ -2x + 2y + 6z + 11 = -4x - 6y + 8z + 29. \end{cases}$$

Simplificando o sistema obtemos

$$\begin{cases} 4y + 8z = -8, \\ 22x + 8y - 2z = 18. \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} y + 2z = -2, \\ 11x + 4y - z = 9. \end{cases}$$

Seja $z = \lambda$. Temos então

$$X = (x, y, z) = \left(\frac{9 + \lambda - 4(-2 - 2\lambda)}{11}, -2 - 2\lambda, \lambda \right).$$

Por fim, obtemos a reta

$$\boxed{r: \ (x, y, z) = \left(\tfrac{17}{11}, -2, 0\right) + \lambda \left(\tfrac{9}{11}, -2, 1\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \clubsuit}$$

2. Dadas as retas

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = z - 1 \quad \text{e} \quad s : \frac{x-6}{5} = y - 1 = z - 3,$$

determine se elas são paralelas, concorrentes ou reversas. Se concorrentes, determine o ponto de interseção. Ainda, determine a distância entre as retas.

Solução.

Para determinar a posição relativa e a distância entre as retas r e s, consideremos

$$P = (2, 3, 1) \in r, \quad \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1), \qquad Q = (6, 1, 3) \in s, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_s} = (5, 1, 1).$$

Seja $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, 2)$. Temos

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(-2) - (-2)(-3) + 2(7) = -14 + 14 = 0.$$

Logo, as retas r e s são coplanares. Como os vetores $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$ são LI, segue que as retas r e s são concorrentes.
Determinemos a intersecção $r \cap s$.
Um ponto genérico $X = (x, y, z)$ pertencente à reta r satisfaz

$$(x, y, z) = (2 + 2\lambda, 3 - \lambda, 1 + \lambda).$$

Substituindo nas equações para s encontramos

$$\frac{2 + 2\lambda - 6}{5} = 3 - \lambda - 1 = 1 + \lambda - 3.$$

Logo,

$$\lambda = 2.$$

Resposta final.

$$r \text{ e } s \text{ são concorrentes e } \; r \cap s = \{(6, 1, 3)\} \clubsuit$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

Atenção 1. Se o determinante acima fosse não nulo, então as retas r e s seriam reversas e os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$ seriam LI.

O determinante na página anterior é também igual ao *produto misto* (vide figura abaixo)

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}) = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}].$$

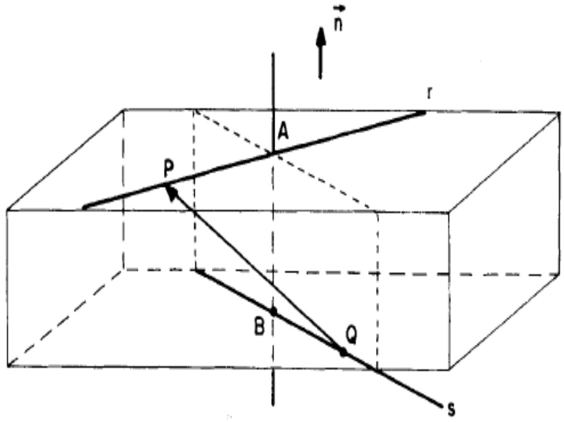

Figura 2: Suponhamos que as retas r e s são reversas. A distância entre r e s é dada por $d = d(r; s) = |\overline{AB}| = \|\vec{AB}\|$ e indicamos $\vec{n} = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s}$.

A distância procurada d (entre as retas supostamente reversas) é o comprimento da projeção do vetor $\overrightarrow{PQ}$ na direção do vetor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$. Assim,

$$d = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \right|.$$

Subsitituindo $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$ encontramos

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}.$$

Observe que se aplicarmos tal fórmula ao problema originalmente apresentado (em que as retas são concorrentes), então encontramos

$$d = 0.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

Atenção 2. Escrevamos $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v}$ e consideremos a figura abaixo.

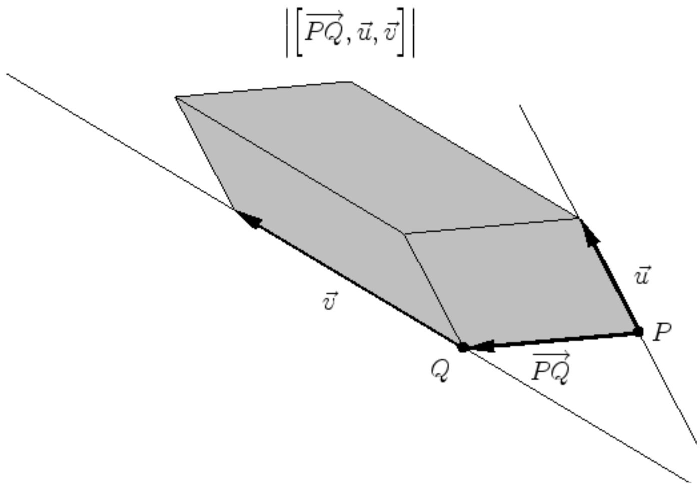

Figura 3: A distância entre as retas r e s, expressa geometricamente e algebricamente em termos do produto misto $[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{PQ} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Tal figura mostra que o produto misto (considerado no problema acima)

$$\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|$$

representa (a menos de sinal) o *volume do paralelepípedo* com

$$\text{área de uma face dada por } \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$$

e com altura d, relativa a esta face, satisfazendo a identidade

$$\left|[\overline{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right| = d\,\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|.$$

Donde segue

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} \clubsuit$$

3. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano

$$\pi : x + 2y - 2z = 1$$

e que distam duas unidades dele.

Solução.

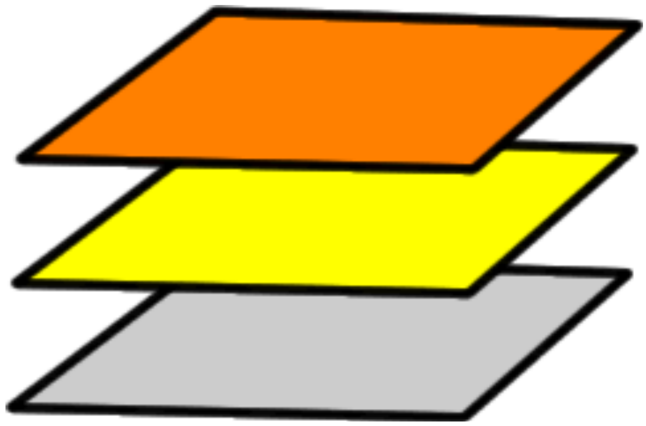

Figura 4: Os dois planos equidistantes de um plano π. Todos paralelos.

A equação geral dos planos paralelos a π é dada por

$$\pi_d : \ x + 2y - 2z + d = 0, \ \text{onde } d \in \mathbb{R},$$

pois todos estes planos tem a direção do vetor normal $(1, 2, -2)$.

A distância do plano π_d ao plano π [indicada $d(\pi_d; \pi)$] é dada pela distância de qualquer ponto X_0 do plano π_d ao plano π [indicada $d(X_0; \pi)$].

Seja então $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi_d$. Por acima temos

$$d(\pi_d; \pi) = d(X_0; \pi).$$

A distância de $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano π é dada pela fórmula

$$d(X_0; \pi) = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|x_0 + 2y_0 - 2z_0 - 1|}{3}.$$

Porém, como $X \in \pi_d$ então temos

$$x_0 + 2y_0 - 2z_0 = -d.$$

Substiuindo na expressão para $d(x_0; \pi)$ encontramos

$$d(X_0; \pi) = \frac{| - d - 1|}{3} = \frac{|d + 1|}{3}.$$

Impomdo $d = 2$ obtemos $|d + 1| = 6$ e então $d = 5$ ou $d = -7$.

Finalmente, encontramos dois planos. A saber,

$$\boxed{x + 2y - 2z + 5 = 0 \quad \text{e} \quad x + 2y - 2z - 7 = 0 \clubsuit}$$

4. Determine a distância do ponto $P = (4, -1, 2)$ à reta

$$r: \ x = 1 + t\,, \ y = 3 - 2t\,, \ z = 4 - 3t.$$

Solução.

Observemos que um ponto A de r e um vetor diretor de r são dados por

$$A = (1, 3, 4) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{u} = (1, -2, -3).$$

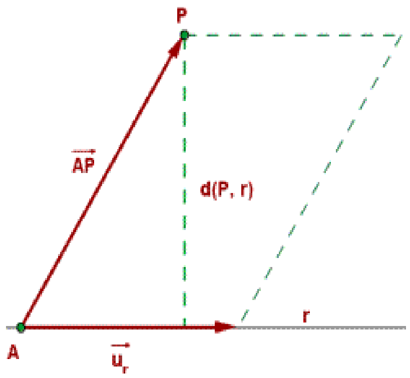

Figura 5: A distância $d = d(P; r)$ do ponto P à reta r é a altura do paralelogramo de área $\|\vec{AP} \wedge \vec{u}\|$ e comprimento da base $\|\vec{u}\|$.

Assim, a distância $d = d(P; r)$ do ponto P à reta r é dada por

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Temos

$$\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (8, 7, -2).$$

Temos também

$$\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{u}\|^2 = 117 \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{u}\|^2 = 14.$$

Donde segue

$$\boxed{d = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{14}} \clubsuit}$$

5. Classifique a seguinte quádrica no espaço e esboce-a:

$$4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0.$$

Solução.

Completando quadrados obtemos

$$[4(y-2)^2 - 16] + [(z-2)^2 - 4] - x - 20 = 0.$$

Logo,

$$x + 98 = 4(y-2)^2 + (z-2)^2.$$

Escrevamos

$$\begin{cases} O' = (-98, 2, 2) \\ u = x + 98 \\ v = y - 2 \\ w = z - 2. \end{cases}$$

Então, com esta translação obtemos no sistema $O'uvw$ a equação

$$\frac{u}{4} = v^2 + \frac{w^2}{2^2}.$$

Logo, a quádrica (no espaço) é um *parabolóide elíptico*. Vide figura abaixo.

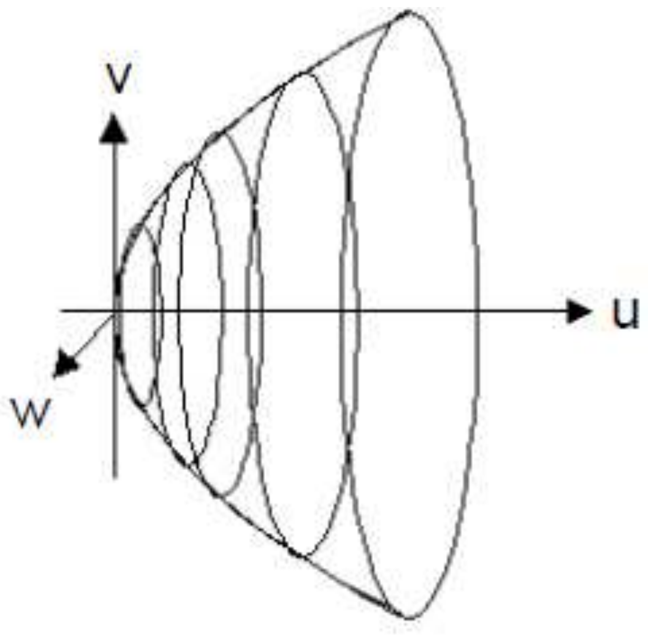

Figura 6: O parabolóide elíptico $\frac{u}{4} = v^2 + \frac{w^2}{2^2}$ ♣