MAT 105 - Geometria Analítica
Prova de Recuperação - 21/07/2016

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____________________**GABARITO**____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens
Boa sorte!

1. Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base (ordenada) ortonormal. Considere

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{j} + \vec{k}\right) \quad \text{e} \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right).$$

(a) Mostre que o conjunto ordenado $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

(b) Calcule as coordenadas do vetor

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

em relação à base F.

Solução.

(a) As coordenadas de ($\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$) em relação à base E são

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)_E, \vec{v} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_E \text{ e } \vec{w} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)_E.$$

Tais vetores são dois a dois ortogonais pois satisfazem (cheque, é trivial)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

Tais vetores são unitários pos satisfazem

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \text{ e } \|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 1.$$

Segue então que tais vetores são L.I (provado em sala). Logo, $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base ortonormal.

(b) **PRIMEIRA SOLUÇÃO.**

A matriz de mudança da base F para a base E é

$$M = [I]_E^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante pela primeira linha é fácil ver que

$$\det M = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Para obter a matriz inversa M^{-1} (isto é, a matriz de mudança $[I]_F^E$, da base E para a base F), computamos a matriz dos cofatores de M. Obtemos

$$M_c = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad (\text{neste caso}, M_c = M).$$

A matriz inversa M^{-1} é dada por

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M_c^T,$$

onde M_c^T é matriz transposta dos cofatores. Isto é,

$$M^{-1} = [I]_F^E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[\overrightarrow{a}]_F = [I]_F^E \, [\overrightarrow{a}]_E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{7\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Isto é,

$$\overrightarrow{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{u} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v} + \frac{7\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{w} \clubsuit$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

(b) **SEGUNDA SOLUÇÃO.**

A matriz de mudança da base F para a base E é

$$[I]_E^F = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Para obter a matriz inversa (a matria de mudança $[I]_F^E$, da base E para a base F), escrevemos lado a lado a matriz $[I]_E^F$, e a matriz identidade I. Isto é,

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{matrix} \vdots \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

A seguir, efetuamos operações elementares nas linhas de $[I]_E^F$ até encontrarmos a matriz identidades e efetuamos estas mesmas operações nas linhas da matriz identidade. Ao fim destas operações, a matriz à direita será a matriz $[I]_F^E$ procurada.

Primeira operação elementar e segunda operação elementar. (1) Multiplicamos a primeira linha por -1 e somamos à segunda linha. (2) Multiplicamos a primeira linha por 1 e somamos à terceira linha. Obtemos

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \end{matrix} \vdots \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}.$$

Terceira operação elementar. Multiplica a segunda linha por -1 e soma à terceira.

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{matrix} \vdots \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}.$$

Quarta operação elementar. Divide a terceira linha por 6.

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{matrix} \vdots \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix}.$$

Quinta operação elementar e sexta operação elementar. (5) Multiplica a terceira linha por -2 e soma à primeira linha. (6) Multiplica a terceira linha por 3 e soma à segunda linha.

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{matrix} \vdots \begin{matrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-2}{6} \\ 0 & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix}.$$

Sétima, oitava e nona operações elementares. (7) Multiplica primeira linha por $\sqrt{3}$. Quanto à (8), multiplique a segunda linha por $\sqrt{2}$. Quanto à (9), multiplique a terceira linha por $\sqrt{6}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \vdots & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6}
\end{array}.
$$

Logo,

$$
[I]_F^E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.
$$

Assim,

$$
[\overrightarrow{a}]_F = [I]_F^E \, [\overrightarrow{a}]_E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{7\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.
$$

Isto é,

$$
\overrightarrow{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{u} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{v} + \frac{7\sqrt{6}}{6}\overrightarrow{w} \clubsuit
$$

2. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$, dados

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,0), \qquad \overrightarrow{AC} = (0,1,1) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{AD} = (-4,0,0).$$

Solução.

A figura abaixo ilustra a relação entre o volume do tetraedro, o volume do paralelepípedo e o produto misto de três vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$.

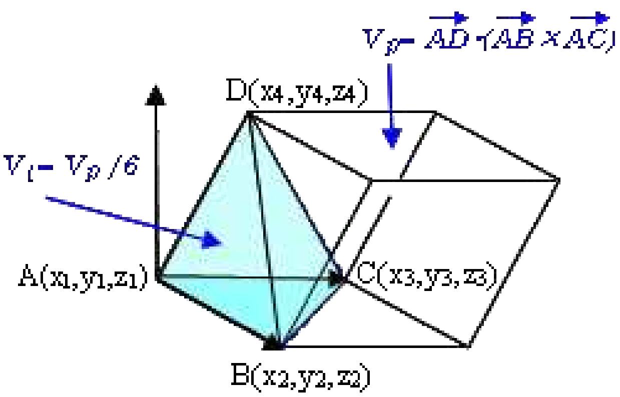

Figura 1: O volume do tetraedro é a sexta parte do volume do paralelepípedo.

Se V_T é o volume do tetraedro e V_P é o volume do paralelepípedo, segue

$$V_T = \frac{V_P}{6}.$$

Porém, temos

$$V_P = \left|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right| = | \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} | = |-4| = 4.$$

Logo,

$$V_T = \frac{2}{3} \clubsuit$$

3. Dadas as retas

$$r: \frac{x+1}{2} = y = -z \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0, \end{cases}$$

determine se elas são paralelas, concorrentes ou reversas. Se concorrentes, determine o ponto de interseção. Ainda, determine a distância entre as retas.

Solução.

Uma equação vetorial para a reta r é dada por

$$r: \ (x, y, z) = (-1, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1).$$

Uma equação vetorial para s pode ser obtida impondo $z = \mu$ e então temos

$$x + y = 1 + 3\mu \quad \text{e} \quad 2x - y = 2\mu.$$

Somando estas duas temos $3x = 1 + 5\mu$. Logo,

$$x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\mu \qquad \text{e} \qquad y = 2x - 2\mu = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}\mu - 2\mu = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\mu.$$

Segue então

$$s: \ (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + \mu\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right).$$

Trocando o vetor diretor de s por um mais conveniente obtemos

$$s: \ (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + \mu(5, 4, 3).$$

É claro que r e s não são paralelas.

A distância $d = d(r; s)$ entre duas retas não paralelas (reversas ou não) r e s é dada pela fórmula (vide figura abaixo)

$$d = \left|\text{proj}_{\overrightarrow{n}}(\overrightarrow{PQ})\right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s})|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}, \text{ onde } P \in r, \ Q \in s \text{ e } \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}.$$

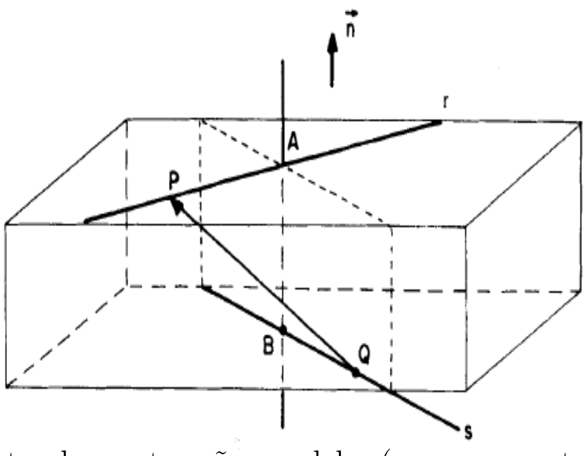

Figura 2: Distância entre duas retas não paralelas (reversas, neste esboço). A distância entre as retas r e s é dada por $d = d(r; s) = |\overline{AB}| = \|\vec{AB}\|$ e indicamos $\vec{n} = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s}$

Sejam

$$P = (-1,0,0), \quad Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad \overrightarrow{v_r} = (2,1,-1) \ \text{ e } \ \overrightarrow{v_s} = (5,4,3).$$

Logo,

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (7, -11, 3).$$

Donde segue

$$\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\| = \sqrt{49 + 121 + 9} = \sqrt{179}.$$

Ainda,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \cdot (7, -11, 3) = \frac{28}{3} - \frac{22}{3} = 2.$$

Assim, a distância entre as retas não paralelas r e s é

$$d = \frac{2}{\sqrt{179}}.$$

Resposta final.

$$\boxed{\text{As retas } r \text{ e } s \text{ são reversas é a distância entre elas é } d = \tfrac{2}{\sqrt{179}} \clubsuit}$$

Atenção 1. Temos também

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}) = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Atenção 2. Observemos que (vide a figura acima) a distância procurada d é o comprimento da projeção do vetor $\overrightarrow{PQ}$ na direção do vetor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$. Assim,

$$d = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \right|.$$

Subsitituindo $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}$ encontramos

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|} = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]\right|}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|} = \frac{2}{\|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s}\|}.$$

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

Atenção 3. Escrevamos $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v}$ e consideremos a figura abaixo.

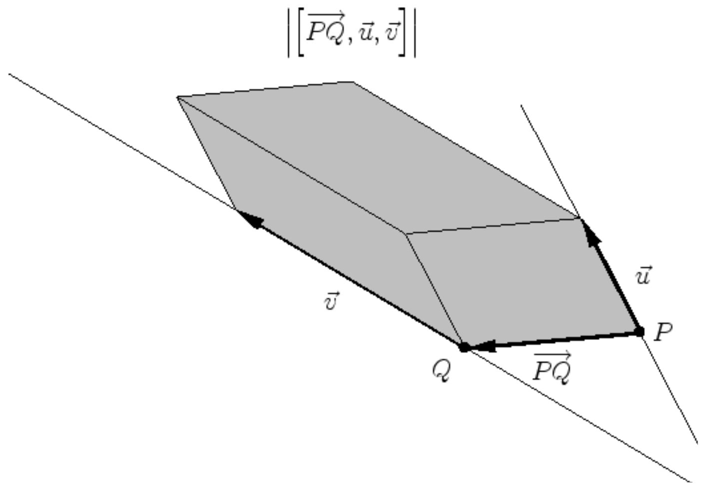

Figura 3: A distância entre as retas r e s expressa geometricamente e algebricamente através do produto misto $[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] = \vec{PQ} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

Tal figura mostra que o produto misto (considerado no problema acima)

$$\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|$$

representa (a menos de sinal) o *volume do paralelepípedo* com

$$\text{área de uma face dada por } \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$$

e com altura d, relativa a esta face, satisfazendo a identidade

$$\left|[\overline{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right| = d\, \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|.$$

Donde segue a fórmula que utilizamos acima

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} \clubsuit$$

4. Obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta

$$r : X = (1,1,0) + \lambda(2,1,2)$$

e é paralelo à reta

$$s : \frac{x+1}{2} = y = z + 3.$$

Solução.

Seja π o plano procurado. Os vetores diretores das retas r e s, respectivamente dados por $(2,1,2)$ e $(2,1,1)$, são paralelos ao plano π. O ponto $(1,1,0)$ pertence ao plano π. Logo, a equação geral de π é dada por

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) + 2(y-1) + 0z.$$

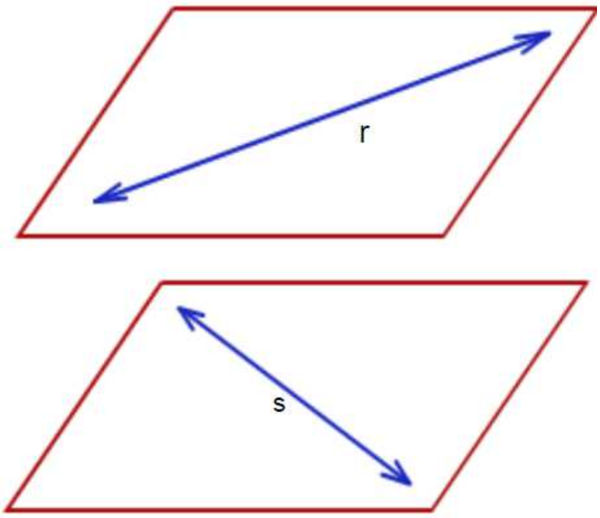

Figura 4: O plano que contém a reta r é paralelo à reta s.

Donde segue

$$\boxed{\pi : \ -x + 2y - 1 = 0 \clubsuit}$$

5. Considere a seguinte quádrica no plano (uma cônica):

$$x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$$

(a) Simplifique a equação da quádrica e classifique a quádrica (isto é, identifique por nome a curva obtida).

(b) Indique as coordenadas do centro da quádrica no sistema Oxy.

(c) Esboce a quádrica, com os dois sistemas de coordenadas utilizados no mesmo esboço.