$2^{\underline{a}}$ Prova de Geometria Analítica para Inst. Geociências - MAT105
07/07/2016

Nome : ________________**GABARITO**________________
$N^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. Obtenha uma equação vetorial para a reta t, concorrente com as retas

$$r : \ \frac{x+1}{2} = y = -z \qquad \text{e} \qquad s : \ X = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + \lambda(5,4,3),$$

e, ainda, com a reta t paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (1,0,1)$.

Primeira Solução (Laiza Maietto Lauriano).

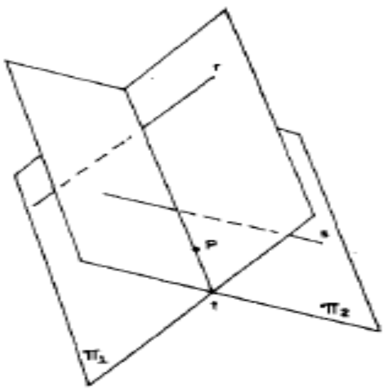

Figura 1: O plano π_1 contém as retas t e r. O plano π_2 contém as retas t e s.

$\diamond$ O plano π_1 passa pelo ponto $(-1,0,0) \in r$ e tem por vetores diretores $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-1)$ e $\overrightarrow{v_t} = (1,0,-1)$. Logo, a equação geral de π_1 é

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 3y - z + 1 = 0.$$

$\diamond$ O plano π_2 passa pelo ponto $(1/3, 2/3, 0) \in s$ e tem por vetores diretores $\overrightarrow{v_s} = (5,4,-3)$ e $\overrightarrow{v_t} = (1,0,-1)$. Logo, a equação geral de π_2 é

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & y-\frac{2}{3} & z-0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4x - 2y - 4z = 0.$$

$\diamond$ A reta r é então dada pelo sistema de equações

$$r : \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ 4x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -4 e somando-a à segunda, segue $10y = 4$ e $y = 2/5$. Considerando o parâmetro $\lambda = z$, segue

$$\boxed{r : X = \left(\tfrac{1}{5} + \lambda, \tfrac{2}{5}, \lambda\right) = \left(\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, 0\right) + \lambda(1,0,1), \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R} \clubsuit}$$

Segunda Solução (Marina Martins da Silva).

⋄ Um ponto genérico R da reta r é dado por

$$R = (-1 + 2\mu, \mu, -\mu), \quad \text{com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Um ponto genérico S da reta s é dado por

$$S = \left(\frac{1}{3} + 5\lambda, \frac{2}{3} + 4\lambda, 3\lambda\right), \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Impondo R e S pertencentes à reta t, por hipótese temos

$$\overrightarrow{RS} \; // \; (1, 0, 1).$$

Portanto

$$\left(5\lambda - 2\mu + \frac{4}{3}, 4\lambda - \mu + \frac{2}{3}, 3\lambda + \mu\right) \; // \; (1, 0, 1).$$

Logo,

$$\begin{cases} 5\lambda - 2\mu + \frac{4}{3} = 3\lambda + \mu \\ \\ 4\lambda - \mu + \frac{2}{3} = 0. \end{cases}$$

Donde segue

$$\mu = \frac{2}{5} \qquad \text{e} \qquad \lambda = -\frac{1}{15}.$$

Por outro lado, temos

$$r : X = R + \nu(1, 0, 1), \quad \text{com } \nu \in \mathbb{R}.$$

Substituido μ na fórmula para o ponto R, encerramos com

$$\boxed{r : X = \left(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, -\tfrac{2}{5}\right) + \nu(1, 0, 1), \quad \text{com } \nu \in \mathbb{R} \clubsuit}$$

2. Ache uma equação geral do plano α passando pelo ponto $(2, 1, 0)$ e, ainda, com o plano α perpendicular aos planos

$$\beta: \ x + 2y - 3z + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma: \ 8x - 4y + 16z - 1 = 0.$$

Solução.

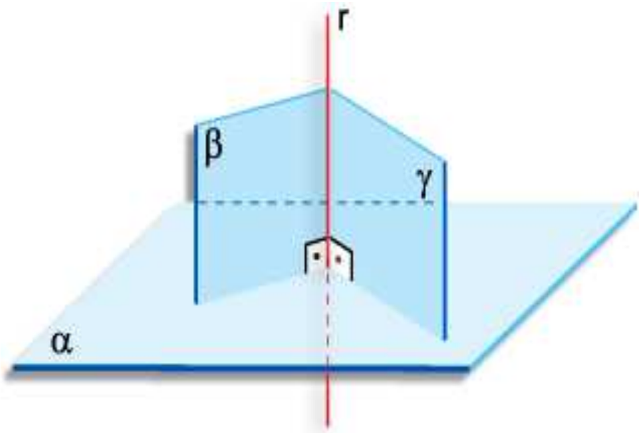

Figura 2: Um plano α que é perpendicular a dois planos, indicados β e γ.

- ⋄ Os vetores normais

$$\overrightarrow{n_\beta} = (1, 2, -3) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{n_\gamma} = (2, -1, 4)$$

são LI e paralelos ao plano α.

- ⋄ Por hipótese, $P = (2, 1, 0) \in \alpha$.
- ⋄ Seja $X = (x, y, z)$ arbitrário em E^3. Então,

$$X \in \alpha \Longleftrightarrow \left\{\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{n_\beta}, \overrightarrow{n_\gamma}\right\} \quad \text{é LD.}$$

Segue que a equação para α é dada por

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$5(x-2) - 10(y-1) - 5z = 0.$$

A equação do plano α é

$$\alpha: \ 5x - 10y - 5z = 0.$$

De forma sucinta,

$$\boxed{\alpha: \ x - 2y - z = 0 \clubsuit}$$

3. Ache uma equação vetorial da reta r que passa pelo ponto

$$P = (1, -2, 3)$$

e tal que a reta r forma um ângulo de 45^o com o eixo Ox e, ainda, com a reta r formando um ângulo de 60^o com o eixo Oy.

Solução.

Dadas duas retas, o ângulo entre elas é o ângulo agudo entre elas.
Formalizemos.
Sejam r_1 e r_2 duas retas (não ortogonais) e $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ respectivos vetores diretores. Consideremos o ângulo formado pelo par $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ e o ângulo formado pelo par $\{\overrightarrow{v_1}, -\overrightarrow{v_2}\}$. Tais ângulos são suplementares. O ângulo entre as retas r_1 e r_2 é o ângulo agudo estes dois ângulos. Vide figura.

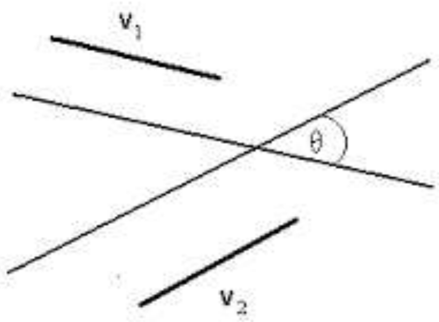

Figura 3: O ângulo (agudo) entre duas retas.

Resolvamos a questão.
Seja $\overrightarrow{v_r} = (a, b, c)$ um versor (i.e., $a^2 + b^2 + c^2 = 1$) para a reta r.
O ângulo entre r e Ox é 45^o. Logo, o ângulo entre $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{e_1}$ é 45^o ou 135^o e

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{e_1}\| \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Porém, $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{e_1} = a$. Logo, $a = \pm 1/\sqrt{2}$.
O ângulo entre r e Oy é 60^o. Logo, o ângulo entre $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{e_e}$ é 60^o ou 120^o e

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{e_2} = \|\overrightarrow{v_r}\| \, \|\overrightarrow{e_1}\| \left(\pm \frac{1}{2} \right).$$

Porém, $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{e_2} = b$. Logo, $b = \pm 1/2$.
Donde segue $c^2 = 1/4$ e então $c = \pm 1/2$.
Logo, temos as oito possibilidades

$$\overrightarrow{v_r} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right).$$

Dados dois versores com sentidos contrários, podemos eliminar um deles. Podemos escolher $2\overrightarrow{v_r}$ para vetor diretor. Seguem quatro possibilidades

$$\overrightarrow{v_r} = (\pm\sqrt{2}, 1, \pm 1).$$

Finalmente, temos

$$\boxed{r : \frac{x-1}{\pm\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{\pm 1} \clubsuit}$$

4. Calcule a distância do ponto

$$P = \left(1, 1, \frac{15}{6}\right)$$

ao plano

$$\pi: \ 4x - 6y + 12z + 21 = 0.$$

Solução.

Seja d a distância procurada.

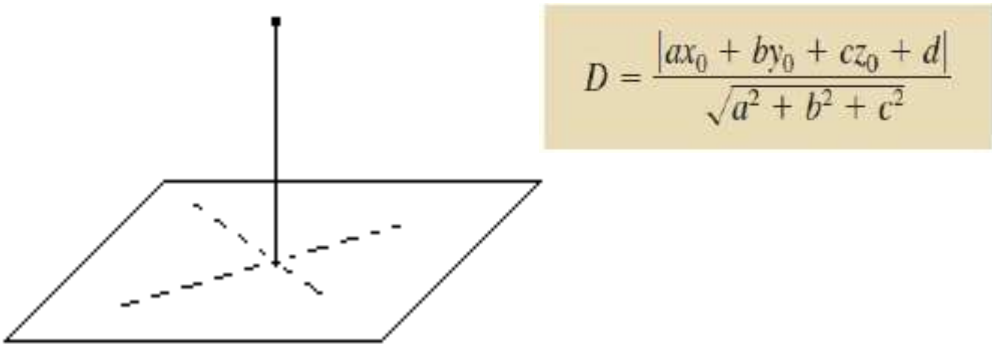

Figura 4: A fórmula da distância do ponto (x_0, y_0, z_0) ao plano $\pi : ax+by+cz+d = 0$.

Então,

$$d = \frac{\left|4.1 - 6.1 + 12.\frac{15}{6} + 21\right|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (12)^2}} = \frac{49}{\sqrt{196}} = \frac{49}{14}.$$

Logo,

$$\boxed{d = \tfrac{7}{2}\,\clubsuit}$$

5. Considere a quádrica (no plano)

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0.$$

(a) Simplifique a equação da quádrica e classifique a quádrica (isto é, identifique por nome a curva obtida).

(b) Indique as coordenadas do centro da quádrica no sistema Oxy.

(c) Esboce a quádrica, com os sistemas de coordenadas utilizados.

Solução.

(a) Completando quadrados encontramos

$$(x-2)^2 - 4 + 2[(y-1)^2 - 1] - 1 = 0.$$

Logo, $x - 2)^2 + (y-1)^2 = 7$ e então

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = 1.}$$

A curva é uma elipse

(b) O centro é da elipse é $\boxed{C = (2,1).}$

(c) Escrevendo

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1\,, \end{cases}$$

esboçamos abaixo a elipse no usual sistema de coordenadas Oxy e no novo sistema $O'uv$, onde $O' = C$.

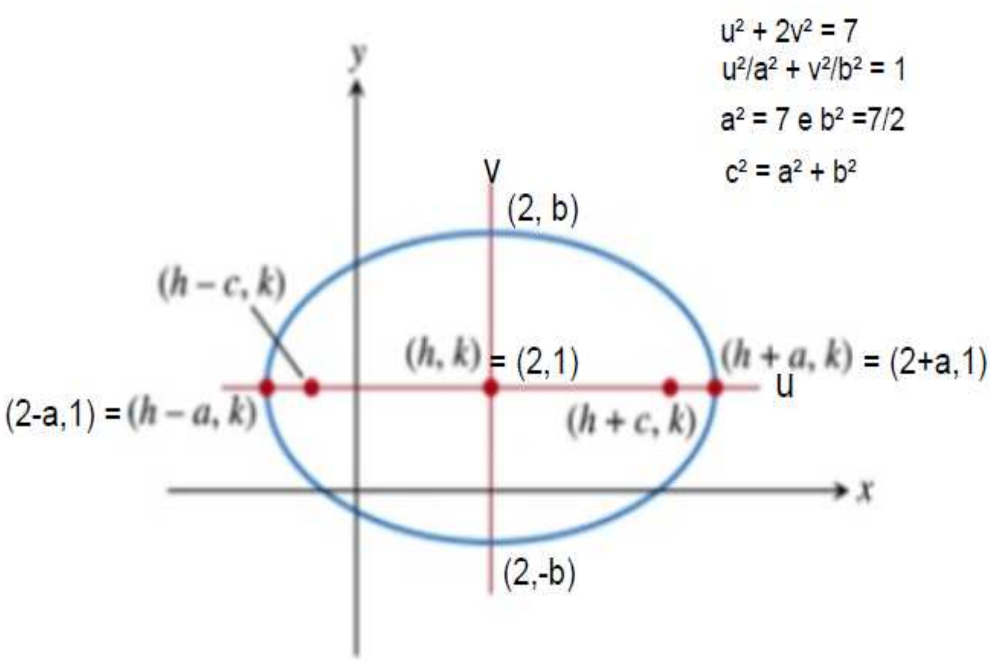

Figura 5: A elipse, nos dois sistemas de coordenadas.