1ª Prova de Geometria Analítica para Inst. Geociências - MAT105
05/05/2016

Nome : ____________________**GABARITO**____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

1. Prove que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto, o qual divide cada uma na razão 2 : 1, a partir do vértice correspondente.

Solução.

Sejam ΔABC um triângulo e os pontos médios M_A, M_B e M_C dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente. Vide figura.

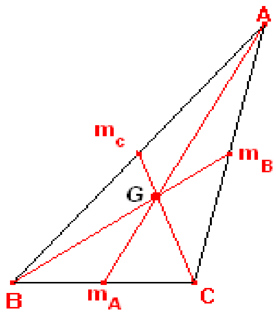

Figura 1: O baricentro G do triângulo ΔABC.

Determinemos a intersecção da mediana r_A contendo o segmento $\overline{AM_A}$ com a mediana r_B que contém o segmento $\overline{BM_B}$. Temos,

$$r_A : X = A + \lambda\overrightarrow{AM_A} \qquad \text{e} \qquad r_B : X = B + \mu\overrightarrow{BM_B}.$$

Resolvamos a equação

$$B + \mu\overrightarrow{BM_B} = A + \lambda\overrightarrow{AM_A} \ \text{ ou, melhor ainda, } \ \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AM_A} - \mu\overrightarrow{BM_B}.$$

Notemos que

$$\overrightarrow{AM_A} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\Big(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\Big) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BM_B} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Segue

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AB} - \frac{\mu}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Logo,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} - \mu\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são Li, segue

$$1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Obtemos então

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}.$$

Seja

$$G = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_B} = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A}.$$

Analogamente obtemos

$$G = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_C}.$$

Isto mostra que as medianas se encontram em único ponto, o baricentro G. Temos ainda

$$|\overline{AG}| = \frac{2}{3}|\overline{AM_A}.$$

Logo, o ponto G divide cada uma das medianas na razão $2:1$ ♣

2. Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

   (a) Esboce o tetraedro e o ponto M.

   (b) Explique porque $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ é uma base (ordenada).

   (c) Determine as cooordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base (ordenada).

   Solução.

   (a) Consideremos a representação geométrica

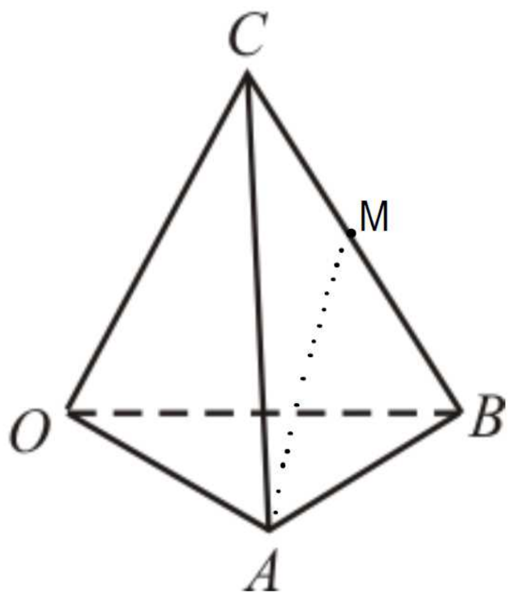

Figura 2: O tetraedro (regular ou não) $OABC$ e o ponto médio M do lado $\overline{BC}$.

   (b) Se a terna $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ não formar uma base, então $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ não é LI e portanto a terna é LD. Logo, estes três vetores são coplanares e portanto os pontos O, $A = O + \overrightarrow{OA}$, $B = O + \overrightarrow{OB}$ e $C = O + \overrightarrow{OC}$ são coplanares, contra a hipótese de $OABC$ formar um tetraedro.

   (c) Temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.
\end{aligned}$$

   As cooordenadas de $\overrightarrow{AM}$ em relação à base ordenada $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$ são

$$\boxed{\left(-1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \clubsuit}$$

3. Suponha que

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}, \quad \|\overrightarrow{u}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \|\overrightarrow{v}\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{w}\| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Calcule x, onde

$$x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}.$$

Solução.

Temos

$$\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) \\
&= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w} \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{15+10+6}{30}.$$

Donde segue

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = -\tfrac{31}{60} \clubsuit}$$

4. Ache os vetores $\overrightarrow{x}$ que satisfazem

$$\overrightarrow{x} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = 2(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{8}.$$

Solução.

◇ Escrevamos $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, com a, b e c reais. Temos

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \qquad \text{e} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 8.$$

Logo,

$$(b, c-a, -b) = (2, 2, -2) \qquad \text{e} \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 8.$$

Donde segue

$$b = 2, \quad c = a + 2 \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 8.$$

Logo, $8 = a^2 + 4 + (a+2)^2 = 2a^2 + 4a + 8$ e portanto

$$2a^2 + 4a = 2a(a+2) = 0 \quad \text{e então} \quad a = 0 \;\text{ ou }\; a = -2.$$

Obtemos então duas soluções (correspondentes a $a = 0$ e a $a = -2$)

$$\boxed{\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{x} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\ \clubsuit}$$

Ou, escrevendo de outra forma,

$$\boxed{\overrightarrow{x} = (0, 2, 2) \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{x} = (-2, 2, 0)\,\clubsuit}$$